Вариант 1

1. Образует ли множество последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$, $(x_k \in R)$, для которых ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ сходится, линейное пространство? Если да, то укажите множество, которое является линейным много-образием в нем.

2. Проверить, что в пространстве R^2 норма задана корректно:

$$||x|| = \max\{|x_1|, |x_1 - 2x_2|\}.$$

Изобразить в R^2 множество точек $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию: $||x - a|| = 2||a||$, где $a = (-2, 1)$.

3. Пусть X – нормированное пространство. $x_n, y_n, x, y \in X$, причем $x_n \to x, \quad y_n \to y$ при $n \to \infty$. Доказать, что тогда $||x_n - y_n|| \to ||x - y||$ при $n \to \infty$.

4. Сходится ли данная последовательность:

а) $x_n(t) = 5t^n - \sin e^t$ в $C[0, 1]$, в $L_1(0, 1)$;

б) $x_n = (1, 2, ..., n, 0, 0, 0, ...)$ в l_∞?

5. В пространстве R действительных чисел со стандартной нормой заданы множества $(-7, 3]$ и $\{x = 2k - 1, k \in Z\}$. Являются ли они открытыми? замкнутыми?

6. Пусть H - гильбертово пространство. $x, y \in H$, причем

$$||x|| = 3, \ ||y|| = 4, \ ||x + y|| = 5.$$

Вычислить $||x - 2y||$.

7. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций формула

$$(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} (2 - t)x(t)y(t)dt$$

определяет скалярное произведение. В пространстве с введенным скалярным произведением провести процесс ортогонализации функций $1, t, t^2$.

8. Построить многочлен второй степени, дающий наилучшее приближение по норме в пространстве $L_2(0,1)$ для функции $\cos 2t$.

9. Является ли оператор линейным, ограниченным, непрерывным:

$A : C[0,7] \to R, \quad Ax(t) = 3x(1) - \max\limits_{t\in[0,5]} |x(t)|;$

в $L_1(0,1), \quad Bx(t) = \int\limits_0^1 sx(\sqrt[3]{s^2})ds;$

$C : R^2 \to R^2, \quad C(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - 2x_2);$

$A : L_2(-3,5) \to C[-3,5], \quad Ax(t) = \int\limits_{-3}^{5} tsx(s)ds - e^t.$

10. Пусть H – гильбертово пространство. Оператор $A \in L(H)$, $\alpha \in R$. Доказать, что $\alpha AA^* - 4E \in \delta(H)$, где E – тождественный оператор.

11. Каков характер сходимости последовательности операторов:

$A_n : l_2 \to R, \quad A_n x = x_n - 3x_{2n};$

$B_n : C[0,1] \to C[0,1], \quad B_n x(t) = \int\limits_0^1 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i (ts)^{2i-1}}{(2i-1)!} x(s)ds.$

Вариант 2

1. Образует ли множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $x(t)$, для которых $x(a) = x(b) = 0$, линейное пространство? Если да, то укажите множество, которое является линейным много-образием в нем.

2. Проверить, что в пространстве R^2 норма задана корректно:

$$||x|| = |x_1| + 3|x_1 + x_2|.$$

Изобразить в R^2 множество точек $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию: $||2x - a|| = 3||a||$, где $a = (1, 2)$.

3. Пусть X – нормированное пространство. $x_n, y_n, x, y \in X$, $\alpha, \beta \in R$, причем $x_n \to x$, $y_n \to y$ при $n \to \infty$. Доказать, что тогда $\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y$ при $n \to \infty$.

4. Сходится ли данная последовательность:

а) $x_n(t) = t^n - t^{n+1} + 5$ в $C[0, 1]$, в $L_1(0, 1)$;

б) $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}}_{n}, 0, 0, 0, ...\right)$ в l_2?

5. В пространстве R действительных чисел со стандартной нормой заданы множества $[7, 25)$ и $\{x = 5k,\ k \in Z\}$. Являются ли они открытыми? замкнутыми?

6. В гильбертовом пространстве упростить выражение

$$||x + y + z||^2 - ||x - y||^2 - ||z + y||^2 + ||y||^2.$$

7. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций формула

$$(x, y) = \int_{-1}^{1} (2 + t)x(t)y(t)dt$$

определяет скалярное произведение. В пространстве с введенным скалярным произведением провести процесс ортогонализации функций $1, t, t^2$.

8. Построить многочлен второй степени, дающий наилучшее приближение по норме в пространстве $L_2(0,1)$ для функции e^{2t}.

9. Является ли оператор линейным, ограниченным, непрерывным:

из $C[3,5]$ $Ax(t) = \int\limits_3^4 x(s)\,ds - 2x(5)$;

в $L_1(0,1)$, $Bx(t) = \int\limits_0^1 s^3 x(s^2) ds - 3$;

$C : R^2 \to R^2$, $C(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, -x_1 + 2x_2)$;

$A : L_2(-1,2) \to C[-1,2]$, $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{2} t^2 s x(s) ds$.

10. Пусть A, B – самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H. Доказать, что $A^2 - 5A + 4B$ – самосопряженный оператор в H.

11. Каков характер сходимости последовательности операторов:

$A_n : l_2 \to l_2$, $A_n x = (x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+2}, ...)$;

$B_n : C[0,1] \to C[0,1]$, $B_n x(t) = \int\limits_{1/n}^{5/n} st^2 x(s) ds$.

Вариант 3

1. Образует ли множество всех многочленов степени, не превышающей 5, линейное пространство? Если да, то укажите множество, которое является линейным многообразием в нем.

2. Проверить, что в пространстве R^2 норма задана корректно:

$$||x|| = |x_1| + 7|x_2|.$$

Изобразить в R^2 множество точек $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию: $||x + 2a|| = 3||a||$, где $a = (1, 1)$.

3. Пусть X – нормированное пространство. $x_n, y_n, y \in X$, причем $y_n \to \ y$, $||y_n - x_n|| \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что тогда $x_n \to y$ при $n \to \infty$.

4. Сходится ли данная последовательность:

а) $x_n(t) = 5e^{-nt} + 10t^3$ в $C[0, 1]$, в $L_1(0, 1)$;

б) $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, 0, ... \right)$ в l_1?

5. В пространстве R действительных чисел со стандартной нормой заданы множества $[-6, 9)$ и $Q \setminus \{0, 1\}$. Являются ли они открытыми? замкнутыми?

6. В гильбертовом пространстве упростить выражение

$$||3x - y||^2 - ||x - 3y||^2 + 8||y||^2.$$

7. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций формула

$$(x, y) = \int\limits_0^1 e^t x(t)y(t)dt$$

определяет скалярное произведение. В пространстве с введенным скалярным произведением провести процесс ортогонализации функций $1, t, t^2$.

8. Построить многочлен первой степени, дающий наилучшее приближение по норме в пространстве $L_2(-1,1)$ для функции $\sin t$.

9. Является ли оператор линейным, ограниченным, непрерывным:

$A : C[-2,1] \to C[-2,1], \quad Ax(t) = 4x(1) + 3 - \int\limits_{-1}^{t} x(s)\,ds;$

из $L_1(0,1), \quad Bx(t) = \int\limits_0^1 s^7 x(s^2) ds;$

$C : R^2 \to R^2, \quad C(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 2x_2);$

$A : L_2(5,8) \to C[5,8], \quad Ax(t) = \int\limits_5^8 sh ts^2 x(s) ds.$

10. Пусть H гильбертово пространство. Оператор $A \in L(H)$. Доказать, что оператор $3AA^* - 5A^*A$ самосопряжен.

11. Каков характер сходимости последовательности операторов:

$A_n : l_2 \to l_2, \quad A_n x = \left(x_1, \frac{x_2}{2!}, ..., \frac{x_n}{n!}, 0, 0, ...\right);$

$B_n : C[0,1] \to C[0,1], \quad B_n x(t) = \int\limits_{1-1/n}^{1-5/n^2} stx(s)ds.$

Вариант 4

1. Образует ли множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $x(t)$ таких, что $x(\frac{a+b}{2})=0$, линейное пространство? Если да, то укажите множество, которое является линейным многообразием в нем.

2. Проверить, что в пространстве R^2 норма задана корректно:

$$||x|| = |x_2| + 2|x_1 - x_2|.$$

Изобразить в R^2 множество точек $x=(x_1,x_2)$, удовлетворяющих условию: $||x-2a|| = 5||a||$, где $a=(2,1)$.

3. Пусть X – нормированное пространство. $y_n, y \in X$, $\alpha_n, \alpha \in R$. Доказать, что если $y_n \to\ y$, $\alpha_n \to \alpha$ при $n \to \infty$, то $\alpha_n y_n \to \alpha y$.

4. Сходится ли данная последовательность:

а) $x_n(t) = t^n/n$ в $C^1[0,1]$, в $L_2(0,1)$;

б) $x_n = (\underbrace{1,0,1,0,...,0,1}_{2n},0,0,0,...)$ в l_∞?

5. В пространстве R действительных чисел со стандартной нормой заданы множества $[-3,11)$ и I – множество иррациональных чисел. Являются ли они открытыми? замкнутыми?

6. В гильбертовом пространстве упростить выражение

$$||z-2x||^2 - ||x+2z||^2 + ||2z+2x||^2.$$

7. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций формула

$$(x,y) = \int_0^1 e^t x(t) y(t) dt$$

определяет скалярное произведение. В пространстве с введенным скалярным произведением провести процесс ортогонализации функций $1, t, t^2$.

8. Построить многочлен первой степени, дающий наилучшее приближение по норме в пространсте $L_2(-1,1)$ для функции $\sin 2t$.

9. Является ли оператор линейным, ограниченным, непрерывным:

$A : C[-3,2] \to C[-3,2], \quad Ax(t) = x(0) - 3 \max\limits_{t\in[-1,1]} |x(t)|;$

из $L_1(0,1), \quad Bx(t) = \int\limits_0^1 x(\sqrt[4]{s})ds;$

$C : R^2 \to R^2, \quad C(x_1, x_2) = (x_1, 5x_1 - 3x_2);$

$A : L_2(-1,4) \to C[-1,4], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{4} t^2 s^3 x(s)ds - t \operatorname{ch} t.$

10. Пусть A, B – самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H. Доказать, что оператор ABA самосопряжен в H.

11. Каков характер сходимости последовательности операторов:

$A_n : l_2 \to l_2, \quad A_n x = (0, ..., 0, x_n, 0, ..., 0, x_{2n}, 0, ..., 0, x_{3n}, 0, ...);$

$B_n : C[0,1] \to C[0,1], \quad B_n x(t) = \int\limits_0^1 \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{(t+2s)^i}{i!} x(s)ds.$

Вариант 5

1. Образует ли множество последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ сходится, линейное пространство? Если да, то укажите множество, которое является линейным многообразием в нем.

2. Проверить, что в пространстве R^2 норма задана корректно:

$$||x|| = |x_1 - x_2| + |x_1 + x_2|.$$

Изобразить в R^2 множество точек $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию: $||x + a|| = 2||a||$, где $a = (3, 0)$.

3. Пусть X – нормированное пространство. $x_n, y_n, x, y \in X$, причем $x_n \to x$, $y_n \to y$ при $n \to \infty$. Доказать, что при $n \to \infty$ $3x_n - 5y_n \to 3x - 5y$.

4. Сходится ли данная последовательность:

а) $x_n(t) = ne^{-n^3 t} + 11t^3$ в $C[0, 1]$, в $L_1(0, 1)$;

б) $x_n = (\underbrace{1, -1, ..., 1, -1}_{2n}, 0, 0, 0, ...)$ в l_2?

5. В пространстве R действительных чисел со стандартной нормой заданы множества $(2, 3)$ и $\{x = 2k,\ k \in Z\}$. Являются ли они открытыми? замкнутыми?

6. В гильбертовом пространстве упростить выражение

$$||x - 2y||^2 + ||y + 2x||^2 - 5||x||^2.$$

7. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций формула

$$(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} (1 + t^2) x(t) y(t) dt$$

определяет скалярное произведение. В пространстве с введенным скалярным произведением провести процесс ортогонализации функций $1, t, t^2$.

8. Построить многочлен первой степени, дающий наилучшее приближение по норме в пронстранстве $L_2(0,1)$ для функции $\operatorname{ch} t$.

9. Является ли оператор линейным, ограниченным, непрерывным:

$A : C[-3,2] \to C[-3,2], \quad Ax(t) = \sin^2 t - 2x(0);$

из $L_1(0,1), \quad Bx(t) = 3\int\limits_0^1 s^2 x(\sqrt{s})ds;$

$C : R^2 \to R^2, \quad C(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2);$

в $D : L_2(4,8) \to C[4,8], \quad Dx(t) = \int\limits_4^8 tsx(s)ds - 3e^t?$

10. Пусть H гильбертово пространство. Оператор $A \in L(H)$. Доказать, что оператор $A^*A + 2AA^*$ самосопряжен.

11. Каков характер сходимости последовательности операторов:

$A_n : l_2 \to l_2, \quad A_n x = \left(x_1, 0, \frac{x_2}{2!}, 0, \frac{x_3}{3!}, ..., \frac{x_n}{n!}, 0, 0, 0, ...\right);$

$B_n : C[0,1] \to C[0,1], \quad B_n x(t) = \int\limits_{1/n^2}^{1-1/n^2} ts^7 x(s)ds.$

Вариант 6

1. Образует ли множество всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций линейное пространство? Если да, то укажите множество, которое является линейным многообразием в нем.

2. Проверить, что в пространстве R^2 норма задана корректно:

$$||x|| = |x_1 - x_2| + |x_2|.$$

Изобразить в R^2 множество точек $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию: $||2x + a|| = 4||a||$, где $a = (-1, 1)$.

3. Пусть X – нормированное пространство. $x_n, x, a \in X$, причем $x_n \to\ x$ при $n \to \infty$. Доказать, что $||-5x_n + a|| \to ||5x - a||$ при $n \to \infty$.

4. Сходится ли данная последовательность:

а) $x_n(t) = \sin^2 t - 5\dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ в $C^1[0, 1]$, в $L_2(0, 1)$;

б) $x_n = \left(1, 0, \dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{3}, ..., \dfrac{1}{n}, 0, 0, 0, ...\right)$ в l_1?

5. В пространстве R действительных чисел со стандартной нормой заданы множества $(-4, 7]$ и $R \setminus \{5, 10\}$. Являются ли они открытыми? замкнутыми?

6. В гильбертовом пространстве упростить выражение

$$2||x + y - z||^2 - ||y + z - x||^2 - ||x - y + z||^2.$$

7. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций формула

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)(t^2 + 1)dt$$

определяет скалярное произведение. В пространстве с введенным скалярным произведением провести процесс ортогонализации функций $1, t, t^2$.

8. Построить многочлен первой степени, дающий наилучшее приближение по норме в пространстве $L_2(-1,1)$ для функции $\cos t$.

9. Является ли оператор линейным, ограниченным, непрерывным:

$A : C[1,5] \to C[1,5],\ \ Ax(t) = \max\limits_{1\le t\le 3} |x(t)| - 3x(2);$

из $L_1(0,1),\ \ Bx(t) = \int\limits_0^1 x(\sqrt[3]{s})ds;$

$C : R^2 \to R^2,\ \ C(x_1,x_2) = (3x_2 - x_1, x_2);$

$D : L_2(-3,0) \to C[-3,0],\ \ Dx(t) = \int\limits_{-3}^{0} tsx(s)ds - t^2.$

10. Пусть H – гильбертово пространство. Операторы $A \in L(H)$, $B \in \delta(H)$. Доказать, что $ABA^* \in \delta(H)$.

11. Каков характер сходимости последовательности операторов:

$A_n : l_2 \to l_2,\ \ A_n x = (x_n, x_{2n}, 0, 0, 0, ...);$

$B_n : C[0,1] \to C[0,1],\ \ B_n x(t) = \int\limits_{1/n^2}^{1/n} e^{st}x(s)ds.$

Вариант 7

1. Образует ли множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $x(t)$ таких, что интеграл $\int\limits_a^b x^2(t)dt$ сходится, линейное пространство? Если да, то укажите множество, которое является линейным многообразием в нем.

2. Проверить, что в пространстве R^2 норма задана корректно:

$$||x|| = \max\{|x_2|, |x_1 - 2x_2|\}.$$

Изобразить в R^2 множество точек $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию: $||x + 2a|| = 4||a||$, где $a = (-2, 2)$.

3. Пусть X – нормированное пространство. $x_n, y_n \in X$ – фундаментальные последовательности. Доказать, что последовательность $||x_n - y_n||$ сходится.

4. Сходится ли данная последовательность:

а) $x_n(t) = e^{-n^2 t} + 5$ в $C[0, 1]$, в $L_1(0, 1)$;

б) $x_n = \left(\frac{1}{1!}, 0, \frac{1}{2!}, 0, ..., \frac{1}{n!}, 0, 0, 0, ...\right)$ в l_2?

5. В пространстве R действительных чисел со стандартной нормой заданы множества $(-4, 7]$ и $R \setminus \{5, 9\}$. Являются ли они открытыми? замкнутыми?

6. Пусть H – гильбертово пространство. $x, y \in H$, причем

$$||x|| = 1, \; ||y|| = 2, \; ||x - y|| = 3.$$

Вычислить $||x + y||$.

7. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций формула

$$(x, y) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)(t^4 + 3)dt$$

определяет скалярное произведение. В пространстве с введенным скалярным произведением провести процесс ортогонализации функций $1, t, t^2$.

8. Построить многочлен первой степени, дающий наилучшее приближение по норме в пространстве $L_2(0,1)$ для функции e^t.

9. Является ли оператор линейным, ограниченным, непрерывным:

$A : C[-1,1] \to C[-1,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 x(-s)ds + 7x(-1);$

из $L_1(0,1), \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 x(\sqrt[5]{s})ds;$

$C : R^2 \to R^2, \quad C(x_1, x_2) = (3x_1 - 2x_2, x_1 + x_2);$

$D : L_2(0,1) \to C[0,1], \quad Dx(t) = e^{55t} - \int\limits_0^{1/2} tx(s)ds.$

10. Пусть A – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Доказать, что оператор $(A^2 + A - 3E) \in \delta(H)$, где E – тождественный оператор.

11. Каков характер сходимости последовательности операторов:

$A_n : l_2 \to l_2, \quad A_n x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...);$

$B_n : C[0,1] \to C[0,1], \quad B_n x(t) = \int\limits_{1/n}^{t} x(s)ds.$

Вариант 8

1. Образует ли множество квадратных nхn матриц линейное пространство? Если да, то укажите множество, которое является линейным многообразием в нем.

2. Проверить, что в пространстве R^2 норма задана корректно:

$$||x|| = \max\{|x_1|, |x_2 - 3x_1|\}.$$

Изобразить в R^2 множество точек $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию: $||x - a|| = 2||a||$, где $a = (-1, 1)$.

3. Пусть X – нормированное пространство. $x_n, x \in X$, $\alpha \in R$, причем $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\alpha x_n \to \alpha x$.

4. Сходится ли данная последовательность:
а) $x_n(t) = \dfrac{\cos nt}{n} - tg\, t$ в $C[0, 1]$, в $L_1(0, 1)$;
б) $x_n = (1, -2, 3, -4, ..., (-1)^{n+1}n, 0, 0, 0, ...)$ в l_∞?

5. В пространстве R действительных чисел со стандартной нормой заданы множества $(0, 4)$ и $\{x : \sin x > 0\}$. Являются ли они открыты-ми? замкнутыми?

6. Пусть H – гильбертово пространство. $x, y \in H$, причем

$$||x|| = 1,\ ||y|| = 1,\ ||x + y|| = 2.$$

Вычислить $||x - y||$.

7. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций формула

$$(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t)(10 - t)dt$$

определяет скалярное произведение. В пространстве с введенным скалярным произведением провести процесс ортогонализации функций $1, t, t^2$.

8. Построить многочлен первой степени, дающий наилучшее приближение по норме в пространстве $L_2(0,1)$ для функции $\operatorname{ch} t$.

9. Является ли оператор линейным, ограниченным, непрерывным:

$A : C[-1,1] \to C[-1,1], \;\; Ax(t) = \int\limits_0^1 x(-s)ds - 8x(-1);$

из $L_1(0,1), \;\; Bx(t) = \int\limits_0^1 sx(\sqrt{s})ds;$

$C : R^2 \to R^2, \;\; C(x_1, x_2) = (x_1, 5x_1 - 3x_2);$

$D : L_2(-2,3) \to C[-2,3], \;\; Dx(t) = \int\limits_t^3 sx(s)ds.$

10. Пусть H – гильбертово пространство. Оператор $A \in L(H)$, причем существует A^{-1}. Доказать, что $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

11. Каков характер сходимости последовательности операторов:

$A_n : l_2 \to l_2, \;\; A_n x = \left(x_1, \frac{x_2}{2^2}, ..., \frac{x_n}{2^n}, ..., 0, 0, ...\right);$

$B_n : C[0,1] \to C[0,1], \;\; B_n x(t) = n \int\limits_t^{t+1/n^3} x(s)ds.$

Вариант 9

1. Образует ли множество всех n-мерных векторов $x = (x_1, ..., x_n)$, $x_i \in R$, $i = 1, ..., n$ линейное пространство? Если да, то укажите множество, которое является линейным многообразием в нем.

2. Проверить, что в пространстве R^2 норма задана корректно:

$$||x|| = \max\{2|x_1|, |x_1 - x_2|\}.$$

Изобразить в R^2 множество точек $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию: $||x + 2a|| = 5||a||$, где $a = (4, -1)$.

3. Пусть X – нормированное пространство. $x_n, y_n, x, y \in X$, причем $x_n \to x,\ y_n \to y$ при $n \to \infty$. Доказать, что

$$||x_n + y_n|| \to ||x + y|| \text{ при } n \to \infty.$$

4. Сходится ли данная последовательность:

а) $x_n(t) = ch\, t + e^{1-nt}$ в $C[0,1]$, в $L_2(0,1)$;

б) $x_n = \left(\frac{x_1}{3}, 0, \frac{1}{9}, 0, \frac{1}{27}, ..., \frac{1}{3^n}, 0, 0, 0, ...\right)$ в l_1?

5. В пространстве R действительных чисел со стандартной нормой заданы множества $(4, 11]$ и $\{x \in R : tg\, x \geq 1\}$. Являются ли они открытыми? замкнутыми?

6. В гильбертовом пространстве упростить выражение

$$\left\|\frac{z+y}{2} + x\right\|^2 - \left\|x - \frac{z+y}{2}\right\|^2.$$

7. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций формула

$$(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} (5 + t)x(t)y(t)dt$$

определяет скалярное произведение. В пространстве с введенным скалярным произведением провести процесс ортогонализации функций $1, t, t^2$.

8. Построить многочлен первой степени, дающий наилучшее приближение по норме в пространстве $L_2(0,1)$ для функции $\sin 2t$.

9. Является ли оператор линейным, ограниченным, непрерывным:

$A : C[-1,1] \to C[-1,1], \quad Ax(t) = \int_{-1}^{0} x(t)tdt - 2x(0);$

из $L_1(0,1), \quad Bx(t) = \int_{0}^{1} x(s^2)s^2 ds;$

$C : R^2 \to R^2, \quad C(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_1 + x_2);$

$D : L_2(-2,1) \to C[-2,1], \quad Dx(t) = t^4 + \int_{1}^{-2} x(s)s \sin t ds.$

10. Пусть A, B – самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H, причем $AB = BA$. Доказать, что $AB \in \delta(H)$.

11. Каков характер сходимости последовательности операторов:

$A_n : l_2 \to l_2, \quad A_n x = (0, ..., 0, x_{2n}, 0, 0, ...);$

$$B_n : C[-1,1] \to C[-1,1], \quad B_n x(t) = \int_{1/n^3}^{1/n} tx(s)ds.$$

Вариант 10

1. Образует ли множество прямоугольных матриц порядка $m \times n$ линейное пространство? Если да, то укажите множество, которое является линейным многообразием в нем.

2. Проверить, что в пространстве R^2 норма задана корректно:

$$||x|| = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Изобразить в R^2 множество точек $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию: $||x - a|| = 2||a||$, где $a = (1, 0)$.

3. Пусть X – нормированное пространство. $x_n, y_n, x \in X$, причем $x_n \to x$, $||x_n - y_n|| \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что $y_n \to x$ при $n \to \infty$.

4. Сходится ли данная последовательность:

а) $x_n(t) = \cos^3 t - ne^{2-n^2 t}$ в $C[0, 1]$, в $L_2(0, 1)$;

б) $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}}_{n}, 0, 0, 0, ...\right)$ в l_1?

5. В пространстве R действительных чисел со стандартной нормой заданы множества $[0, 4)$ и $\{x \in R : ctg\, x \leq 1\}$. Являются ли они открытыми? замкнутыми?

6. Доказать, что в гильбертовом пространстве для любых элементов x, y, z имеет место тождество:

$$||z - x||^2 + ||y - z||^2 = 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}||x - y||^2.$$

7. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на отрезке [-1,1] функций формула

$$(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 x(t) y(t) dt$$

определяет скалярное произведение. В пространстве с введенным скалярным произведением провести процесс ортогонализации функций $1, t, t^2$.

8. Построить многочлен первой степени, дающий наилучшее приближение по норме в пространстве $L_2[0,1]$ для функции e^{4t}.

9. Является ли оператор линейным, ограниченным, непрерывным:

$A : C[-3,1] \to C[-3,1], \quad Ax(t) = t^5 + 2x(-2) - 3x(0);$

$B : R^2 \to R^2, \quad B(x_1, x_2) = (3x_1 - 2x_2, x_1 + x_2);$

из $L_1(0,1), \quad Cx(t) = \int\limits_0^1 x(\sqrt{s}) s ds;$

$D : L_2(-1,5) \to C[-1,5], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^5 x(s) t s^2 ds.$

10. Пусть A, B – самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H, причем A – неотрицательный оператор. Доказать, что оператор BAB неотрицателен.

11. Каков характер сходимости последовательности операторов:

$A_n : l_2 \to l_2, \quad A_n x = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, ..., x_n, 0, 0, ...);$

$B_n : C[0,1] \to C[0,1], \quad B_n x(t) = \int\limits_0^1 \sum\limits_{i=0}^n \frac{(ts)^i}{i!} x(s) ds.$

Вариант 11

1. Образует ли множество решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

$$a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + ... + a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$$

линейное пространство? Если да, то укажите множество, которое является линейным многообразием в нем.

2. Проверить, что в пространстве R^2 норма задана корректно:

$$||x|| = |x_1| + |x_2|.$$

Изобразить в R^2 множество точек $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию: $||x + a|| = ||a||$, где $a = (0, -1)$.

3. Пусть X – нормированное пространство. $x_n, y_n, x, y \in X$, причем $x_n \to x,\ y_n \to y$ при $n \to \infty$. Доказать, что $y_n + x_n \to x + y$ при $n \to \infty$.

4. Сходится ли данная последовательность:

а) $x_n(t) = \dfrac{t^n}{n!} - t^5$ в $C^1[0,1]$, в $L_2(0,1)$;

б) $x_n = (\underbrace{1, 0, -1, 0, ..., 1, 0, -1}_{3n}, 0, 0, 0, ...)$ в l_∞?

5. В пространстве R действительных чисел со стандартной нормой заданы множества $[-2, 3)$, и $\{-1, 0, 1\}$. Являются ли они открытыми? замкнутыми?

6. В гильбертовом пространстве упростить выражение:

$$\|x - 2y\|^2 + \|2x + y\|^2 - 5\|y\|^2.$$

7. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на отрезке [-1,1] функций формула

$$(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} (t^4 + 2)x(t)y(t)dt$$

определяет скалярное произведение. В пространстве с введенным скалярным произведением провести процесс ортогонализации функций $1, t, t^2$.

8. Построить многочлен первой степени, дающий наилучшее приближение по норме в пространстве $L_2(0, 2\pi)$ для функции $\sin 2t$.

9. Является ли оператор линейным, ограниченным, непрерывным:

$A : C[-2, 1] \to C[-2, 1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^t x(s)ds - 7x(0);$

$B : R^2 \to R^2, \quad B(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1);$

из $L_1(0, 1), \quad Cx(t) = \int\limits_0^1 x(s^2)s^5 ds + 10;$

$D : L_2(-1, 3) \to C[-1, 3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^2 x(s)t^2 ds.$

10. Пусть H – гильбертово пространство. Оператор $A \in \delta(H)$, причем $A \geq 0$. Доказать, что $A^3 + 5A^2 + 5A \geq 0$.

11. Каков характер сходимости последовательности операторов:

$A_n : l_2 \to l_2, \quad A_n x = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_n}{2}, 0, 0, ...\right);$

$B_n : C[0, 1] \to C[0, 1], \quad B_n x(t) = n \int\limits_{1/n^2}^{10/n^2} t^3 s x(s) ds.$

Вариант 12

1. Образует ли множество последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$ таких, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = 0$, линейное пространство? Если да, то укажите множество, которое является линейным многообразием в нем.

2. Проверить, что в пространстве R^2 норма задана корректно:

$$||x|| = 3|x_1| + 5|x_2|.$$

Изобразить в R^2 множество точек $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию: $||2x - a|| = 3||a||$, где $a = (1, 2)$.

3. Пусть X – нормированное пространство. $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в X, причем ее подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится. Доказать, что и вся последовательность x_n сходится.

4. Сходится ли данная последовательность:

а) $x_n(t) = \sin\left(\dfrac{t}{n}\right) - 3$ в $C[0,1]$, в $L_1(0,1)$;

б) $x_n = (\underbrace{0, ..., 0}_{n}, 1, 2, 3, ..., n, 0, 0, 0, ...)$ в l_∞?

5. В пространстве R действительных чисел со стандартной нормой заданы множества $[-1, 1)$ и $\{x = 2k,\ k \in Z\}$. Являются ли они открытыми? замкнутыми?

6. Пусть H-гильбертово пространство. $x, y \in H$, причем

$$||x|| = 3,\ ||y|| = 2,\ ||2x - y|| = 1.$$

Вычислить $||x + y||$.

7. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на отрезке [0,1] функций формула

$$(x, y) = \int\limits_0^1 \sqrt{t} x(t) y(t) dt$$

определяет скалярное произведение. В пространстве с введенным скалярным произведением провести процесс ортогонализации функций $1, t, t^2$.

8. Построить многочлен первой степени, дающий наилучшее приближение по норме в пространстве $L_2[-1,1]$ для функции e^{3t}.

9. Является ли оператор линейным, ограниченным, непрерывным:

$A : C[-2,2] \to C[-2,2],\;\; Ax(t) = \int\limits_{-2}^{2} x(t)dt - x(0);$

$B : R^2 \to R^2,\;\; B(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, x_2 - x_1);$

из $L_1(0,1),\;\; Cx(t) = \int\limits_{0}^{1} x(\sqrt{s})s^5 ds + 2;$

$D : L_2(-1,5) \to C[-1,5],\;\; Ax(t) = \int\limits_{-1}^{4} sx(s)t^2 ds.$

10. Пусть H – гильбертово пространство. Оператор $A \in \delta(H)$, причем $A^2 = A$. Доказать, что $(Ax, x) = ||Ax||^2$ для любого $x \in H$.

11. Каков характер сходимости последовательности операторов:

$A_n : l_2 \to l_2,\;\; A_n x = \Big(x_1, \dfrac{x_2}{n}, x_3, \dfrac{x_4}{n^2}, ..., x_{2n-1}, \dfrac{x_{2n}}{n^n}, 0, 0, ...\Big);$

$B_n : C[-1,1] \to C[-1,1],\;\; B_n x(t) = n \int\limits_{1/n^3}^{3/n^3} tsx(s)ds.$

Вариант 13

1. Образует ли множество всех определенных на отрезке $[a,b]$ функций $x(t)$, для которых интеграл $\int\limits_a^b |x(t)|dt$ сходится, линейное пространство? Если да, то укажите множество, которое является линейным многообразием в нем.

2. Проверить, что в пространстве R^2 норма задана корректно:

$$||x|| = |x_1| + 2|x_2 - x_1|.$$

Изобразить в R^2 множество точек $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию: $||x + a|| = 3||a||$, где $a = (3, 0)$.

3. Пусть X – нормированное пространство. $x, x_n, y_n \in X$, причем x_n – фундаментальная последовательность, а y_n – сходящаяся. Доказать, что последовательность $\{y_n + 3x_n - x\}$ фундаментальна.

4. Сходится ли данная последовательность:

а) $x_n(t) = 6t^{50} - t^n$ в $C[0,1]$, в $L_1(0,1)$;

б) $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, 0, 0, 0, ...\right)$ в l_∞?

5. В пространстве R действительных чисел со стандартной нормой заданы множества $(3, 11]$ и $\{x \in R : 0,5 < \cos x \leq 0,9\}$. Являются ли они открытыми? замкнутыми?

6. Пусть H-гильбертово пространство. $x, y \in H$, причем

$$||x|| = 2, \ ||y|| = 1, \ ||x + 2y|| = 3.$$

Вычислить $||2x - y||$.

7. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на отрезке [-1,1] функций формула

$$(x, y) = 2\int\limits_{-1}^{1} (t^2 + 1)x(t)y(t)dt$$

определяет скалярное произведение. В пространстве с введенным скалярным произведением провести процесс ортогонализации функций $1, t, t^2$.

8. Построить многочлен первой степени, дающий наилучшее приближение по норме в пространстве $L_2(0,1)$ для функции $\operatorname{ch} t$.

9. Является ли оператор линейным, ограниченным, непрерывным:

$A : C[-2,7] \to C[-2,7], \quad Ax(t) = \max\limits_{-2 \le t \le 3} |x(t) \sin^3 t| - 9x(7);$

$B : R^2 \to R^2, \quad B(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_2 + x_1);$

из $L_1(0,1), \quad Cx(t) = \int\limits_0^1 x(s^2) s^{10} ds;$

$D : L_2[-5,8] \to C[-5,8], \quad Dx(t) = \int\limits_{-5}^{t} x(s) ds - \sin^2 t.$

10. Пусть H – гильбертово пространство. Оператор $A \in L(H)$. Доказать, что $Ker(AA^*) = Ker(A^*)$.

11. Каков характер сходимости последовательности операторов:

$A_n : l_2 \to l_2, \quad A_n x = (x_n, x_{2n}, x_{3n}, ...);$

$B_n : C[-1,1] \to C[-1,1], \quad B_n x(t) = \int\limits_{-1/n}^{1-1/n} e^t x(s) ds.$

Вариант 14

1. Образует ли множество всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций линейное пространство? Если да, то укажите множество, которое является линейным многообразием в нем.

2. Проверить, что в пространстве R^2 норма задана корректно:

$$||x|| = 2|x_1| + 3|x_2|.$$

Изобразить в R^2 множество точек $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию: $||x - 2a|| = 2||a||$, где $a = (-1, 1)$.

3. Пусть X – нормированное пространство. $x, x_n, y_n \in X$, причем $x_n,\ y_n$ – фундаментальные последовательности. Доказать, что после-довательность $\{x - x_n + 4y_n\}$ тоже фундаментальна.

4. Сходится ли данная последовательность:

а) $x_n(t) = t - t^n + t^{2n}$ в $C[0, 1]$, в $L_1(0, 1)$;

б) $x_n = (\underbrace{1, ..., 1}_{n}, 2, 3, ..., n, 0, 0, 0, ...)$ в l_∞?

5. В пространстве R действительных чисел со стандартной нормой заданы множества $[0, 3)$ и $\{x = 2k - 1,\ k \in Z\}$. Являются ли они открытыми? замкнутыми?

6. Пусть H-гильбертово пространство. $x, y \in H$, причем

$$||x|| = 1,\ ||x + 2y|| = 2,\ ||x - y|| = 5$$

Вычислить $||y||$.

7. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на отрезке [-1,1] функций формула

$$(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} t^4 x(t) y(t) dt$$

определяет скалярное произведение. В пространстве с введенным скалярным произведением провести процесс ортогонализации функций $1, t, t^2$.

8. Построить многочлен первой степени, дающий наилучшее приближение по норме в пространстве $L_2(-\pi,\pi)$ для функции $\sin 4t$.

9. Является ли оператор линейным, ограниченным, непрерывным:

$A : C[-2,0] \to C[-2,0], \quad Ax(t) = \max\limits_{-2\le t\le 0} |e^t x(t)| + 2x(0);$

$B : R^2 \to R^2, \quad B(x_1,x_2) = (x_1 + x_2, x_2);$

из $L_1(0,1), \quad Cx(t) = \int\limits_0^1 x(s^2)s^4 ds + 5;$

$D : L_2(-3,2) \to C[-3,2], \quad Ax(t) = \int\limits_{-3}^{2} t^2 s^2 x(s)ds.$

10. Пусть H – гильбертово пространство. Оператор $A \in \delta(H)$, причем $A \ge 0$. Доказать, что оператор $A^2 + 7A \ge 0$.

11. Каков характер сходимости последовательности операторов:

$A_n : l_2 \to l_2, \quad A_n x = \Big(\dfrac{x_1}{n}, ..., \dfrac{x_n}{n}, ...\Big);$

$B_n : C[0,1] \to C[0,1], \quad B_n x(t) = t \int\limits_{1/n}^{1-1/n} e^{3s}x(s)ds.$

Вариант 15

1. Образует ли множество функций, удовлетворяющих условию Липшица, линейное пространство? Если да, то укажите множество, которое является линейным многообразием в нем.

2. Проверить, что в пространстве R^2 норма задана корректно:

$$||x|| = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Изобразить в R^2 множество точек $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию: $||x + a|| = 3||a||$, где $a = (-1, 1)$.

3. Пусть X – нормированное пространство. $x_n, x \in X$, $\alpha \in R$, причем x_n – фундаментальная последовательность. Доказать, что последовательность $\{\alpha x_n - \alpha x\}$ тоже фундаментальна.

4. Сходится ли данная последовательность:

а) $x_n(t) = ch\, t + 3t^n$ в $C[0, 1]$, в $L_1(0, 1)$;

б) $x_n = (\underbrace{1, -1, ..., 1, -1}_{2n}, 2, 3, ..., n, 0, 0, ...)$ в l_∞?

5. В пространстве R действительных чисел со стандартной нормой заданы множества $[-3, 2)$ и $\{-6, -5, -4\}$. Являются ли они открыты-ми? замкнутыми?

6. Пусть H-гильбертово пространство. $x, y \in H$, причем

$$||x|| = 3,\ ||y|| = 2,\ ||x + y|| = 5.$$

Вычислить $||x - y||$.

7. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на отрезке [-1,1] функций формула

$$(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} (3 - t)x(t)y(t)dt$$

определяет скалярное произведение. В пространстве с введенным скалярным произведением провести процесс ортогонализации функций $1, t, t^2$.

8. Построить многочлен первой степени, дающий наилучшее приближение по норме в пространстве $L_2(0,1)$ для функции e^{5t}.

9. Является ли оператор линейным, ограниченным, непрерывным:

$A : C[2,5] \to C[2,5], \quad Ax(t) = x(2) + \max\limits_{t\in[3,4]} |x(t)\cos t|;$

$B : R^2 \to R^2, \quad B(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2);$

из $L_1(0,1), \quad Cx(t) = \int\limits_1^0 x(\sqrt[3]{s^2})s^2 ds;$

$D : L_2(-1,2) \to C[-1,2], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{2} t^2 sx(s)ds - e^{2t}.$

10. Пусть H – гильбертово пространство. Оператор $A \in L(H)$. Доказать, что $2(A + A^*) \in \delta(H)$.

11. Каков характер сходимости последовательности операторов:

$A_n : l_2 \to l_2, \quad A_n x = (x_{n+1}, x_{n+2}, ...);$

$B_n : C[0,1] \to C[0,1], B_n x(t) = n \int\limits_t^{t+1/n} x(s)ds.$

Вариант 16

1. Образует ли множество многочленов степени, не превосходящей 2, линейное пространство? Если да, то укажите множество, которое является линейным многообразием в нем.

2. Проверить, что в пространстве R^2 норма задана корректно:

$$||x|| = |x_1 + x_2| + 3|x_1|.$$

Изобразить в R^2 множество точек $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию: $||x - a|| = ||a||$, где $a = (-1, 1)$.

3. Пусть X – нормированное пространство. $x, x_n, y_n \in X$, причем x_n, y_n – фундаментальные последовательности. Доказать, что после-довательность $\{5x - x_n + 4y_n\}$ тоже фундаментальна.

4. Сходится ли данная последовательность:

а) $x_n(t) = 1 + n^2 e^{5-n^5 t}$ в $C[0, 1]$, в $L_1(0, 1)$;

б) $x_n = \left(\frac{1}{1!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{5!}, ..., \frac{1}{(2n-1)!}, 0, 0, ...\right)$ в l_2?

5. В пространстве R действительных чисел со стандартной нормой заданы множества $[8, 35)$ и $\{x \in R : 0,5 \le \sin x < 0,7\}$. Являются ли они открытыми? замкнутыми?

6. В гильбертовом пространстве упростить выражение:

$$\|x - 5y\|^2 + \|5x - y\|^2 - 26\|y\|^2.$$

7. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на отрезке [0,1] функций формула

$$(x, y) = \int_0^1 (1 + t)^2 x(t) y(t) dt$$

определяет скалярное произведение. В пространстве с введенным скалярным произведением провести процесс ортогонализации функций $1, t, t^2$.

8. Построить многочлен первой степени, дающий наилучшее приближение по норме в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ для функции $\cos^2 t$.

9. Является ли оператор линейным, ограниченным, непрерывным:

$A : C[-3, 1] \to C[-3, 1], \;\; Ax(t) = t^3 + 2 \int\limits_{-2}^{1} x(t)dt - x(0);$

$B : R^2 \to R^2, \;\; B(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, -x_1);$

из $L_1(0, 1), \;\; Cx(t) = \int\limits_{0}^{1} x(s^2)s^3 ds - 4;$

$D : L_2(0, 5) \to C[0, 5], \;\; Ax(t) = \int\limits_{0}^{4} te^s x(s)ds.$

10. Пусть H – гильбертово пространство. $\alpha \in R$, операторы $A, B \in \delta(H)$, причем $A \geq B$. Доказать, что $\alpha A \leq \alpha B$ если $\alpha < 0$.

11. Каков характер сходимости последовательности операторов:

$A_n : l_2 \to l_2, \;\; A_n x = (\underbrace{0, ..., 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, ...);$

$B_n : C[0, 1] \to C[0, 1], \;\; B_n x(t) = \int\limits_{0}^{t} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!} x(s)ds.$