МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"КЕМЕРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Д. А. ПРОКУДИН, Т. В. ГЛУХАРЕВА, И. В. КАЗАЧЕНКО

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Кемерово 2014

ББК 22.311
УДК 517.95
П 80

Печатается по решению редакционно-издательского совета Кемеровского государственного университета

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор КузГТУ **С. В. Черданцев**;
доктор технических наук, профессор КемТИППа **Т. В. Шевченко**

Прокудин, Д. А.

П 80 Уравнения математической физики: учебное пособие / Д. А. Прокудин, Т. В. Глухарева, И. В. Казаченко; Кемеровский государственный университет. — Кемерово, 2014. — 163 с.

ISBN 978-5-8353-1631-1

Учебное пособие разработано по дисциплине «Уравнения математической физики» в соответствии с требованиями ФГОС ВПО, содержит основные определения, формулировки и доказательства теорем дисциплины «Уравнения математической физики», методы исследования разрешимости различных задач для уравнений с частными производными первого и второго порядков, а также вопросы и задачи, предназначенные для самостоятельного решения. Предназначено для студентов направления «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

ББК 22.311
УДК 517.95

ISBN 978-5-8353-1631-1

Содержание

Предисловие

Курс «Уравнения математической физики» на математическом факультете относится к блоку общих математических и естественнонаучных дисциплин и изучается студентами направления «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» в течение пятого семестра на третьем курсе обучения.

Данное учебное пособие разработано в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и может быть использовано для проведения лекционных занятий со студентами. Пособие способствует формированию у обучающихся таких компетенций как знание корректных постановок классических задач (ПК 9), понимание корректности постановок задач (ПК 10) и выделение главных смысловых аспектов в доказательствах (ПК 16).

Пособие состоит из 5 разделов, каждый из которых содержит в свою очередь несколько подразделов.

В первом разделе рассматриваются такие вопросы курса «Уравнения математической физики», как основные понятия уравнений математической физики, уравнения с частными производными первого порядка и методы их решения, понятие характеристической формы и классификация уравнений с частными производными второго порядка, приведение к каноническому виду линейного уравнения с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными, решение задачи Коши для линейного уравнения второго порядка гиперболического типа, задача Коши для линейного уравнения второго порядка с аналитическими данными, формулировка теоремы Коши–Ковалевской, понятие корректности задачи математической физики, вывод основных уравнений математической физики.

Во втором разделе изучаются различные задачи для уравнений гиперболического типа.

Третий раздел посвящен изучению начально-краевых задач для уравнений параболического типа.

В четвертом разделе дается элементарная теория гармонических функций и рассматривается решение основных краевых задач для уравнений эллиптического типа.

В пятом разделе рассматривается решение смешанных задач для уравнений с частными производными второго порядка гиперболического и параболического типов, решение краевых задач в круговых областях для уравнений с частными производных второго порядка эллиптического типа методом разделения переменных (методом Фурье).

В конце каждого раздела приведены вопросы и задачи, предназначенные для самостоятельного решения.

1. Введение

Уравнение с частными производными — уравнение, содержащее неизвестную функцию двух или более независимых переменных и некоторые частные производные этой функции.

Обозначим через D — область n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ точек $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$[1], $n \geqslant 2$. Пусть $F(\boldsymbol{x}, \ldots, p_{i_1,\ldots,i_n}, \ldots)$ — заданная гладкая[2] действительная функция точек $\boldsymbol{x}$ области D и действительных переменных $p_{i_1,\ldots,i_n}$ с неотрицательными целочисленными индексами $i_1, ..., i_n$, $\sum\limits_{j=1}^{n} i_j = k$, $k = 0, ..., m$, $m \geqslant 1$ и, по крайней мере, одна из производной которой

$$\frac{\partial F}{\partial p_{i_1,\ldots,i_n}},\ \sum_{j=1}^{n} i_j = m$$

отлична от нуля.

Определение 11. *Равенство вида*

$$F\left(\boldsymbol{x}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}, ..., \partial x_n^{i_n}}, ...\right) = 0,\ \sum_{j=1}^{n} i_j = k,\ k = 0, ..., m \quad (1.1)$$

называется дифференциальным уравнением с частными производными порядка m относительно неизвестной функции $u(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in D$.

Уравнение с частными производными первого порядка может быть записано в виде

$$F\left(\boldsymbol{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \quad (1.2)$$

[1] Иногда вместо $x_1, x_2, x_3, ...$ будем писать $x, y, z, ...$

[2] Мы не будем обсуждать степень гладкости функции F, полагая ее непрерывно дифференцируемой столько раз, сколько потребуется.

Уравнение с частными производными второго порядка имеет вид

$$F\left(\boldsymbol{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ... \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, ...\right) = 0, \;\; i, j = 1, ..., n. \quad (1.3)$$

Будем говорить, что мы решили уравнение с частными производными, если найдены все функции u, удовлетворяющие (1.1) (возможно, лишь в классе функций, удовлетворяющих вспомогательным граничным условиям на некоторой части Γ границы ∂D). Когда мы говорим, что решение найдено, в идеальном случае это означает, что найдены простые явные формулы для решения или, если такое невозможно или слишком сложно, доказано существование решения и установлены его некоторые свойства.

Определение 12. *Определенная в области D задания уравнения (1.1) действительная функция $u(\boldsymbol{x})$, непрерывная вместе со своими частными производными, входящими в это уравнение, и обращающая его в тождество, называется классическим решением (или регулярным решением).*

Определение 13. *Если $u(\boldsymbol{x})$ регулярное решение уравнения (1.1), то поверхность $u = u(\boldsymbol{x})$ в пространстве переменных ($\boldsymbol{x}$, u) называется интегральной поверхностью уравнения (1.1).*

Определение 14. *Уравнение с частными производными (1.1) называется линейным, если функция $F(\boldsymbol{x}, \ldots, p_{i_1,\ldots,i_n}, \ldots)$ является линейной относительно всех переменных $p_{i_1,\ldots,i_n}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} i_j = k$, $k = 0, ..., m$.*

Уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\left(\boldsymbol{x}\right) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b\left(\boldsymbol{x}\right) u = f\left(\boldsymbol{x}\right) \quad (1.4)$$

есть линейное уравнение первого порядка, а уравнение

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\,(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial u}{\partial x_i}+c\,(\boldsymbol{x})\,u = f\,(\boldsymbol{x})\,,\ a_{ij}=a_{ji} \quad (1.5)$$

является линейным уравнением второго порядка относительно неизвестной функции $u\,(\boldsymbol{x})$.

Определение 15. *Если функция* $F(\boldsymbol{x},\ldots,p_{i_1,\ldots,i_n},\ldots)$ *линейна относительно переменных* $p_{i_1,\ldots,i_n}$ *при* $\sum_{j=1}^{n} i_j = m$, *то уравнение (1.1) называется квазилинейным.*

Уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\,(\boldsymbol{x},u)\,\frac{\partial u}{\partial x_i} = f\,(\boldsymbol{x},u) \quad (1.6)$$

есть квазилинейное уравнение первого порядка, а уравнение

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\left(\boldsymbol{x},u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f\left(\boldsymbol{x},u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \quad (1.7)$$

— квазилинейное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $u(\boldsymbol{x})$.

Система уравнений с частными производными — совокупность нескольких уравнений с частными производными относительно нескольких неизвестных функций.

Определение 16. *Равенство вида*

$$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x},...,\frac{\partial^k \boldsymbol{u}}{\partial x_1^{i_1},...,\partial x_n^{i_n}},...\right)=0,\ \sum_{j=1}^{n} i_j = k,\ k=0,...,m, \quad (1.8)$$

где $\boldsymbol{F}=(F_1,...,F_s)$ *задана, а* $\boldsymbol{u}=(u_1,...,u_s)$ *неизвестна, называется системой уравнений с частными производными* m*–го порядка.*

Мы будем рассматривать системы, у которых число уравнений s совпадает с числом неизвестных $u_1, ..., u_s$. Обычно рассматриваются именно такие системы, хотя случаи, когда число уравнений меньше или больше числа неизвестных, также исследуются.

Очевидно, что можно классифицировать системы по признаку линейности и квазилинейности.

Не существует общей теории, устанавливающей разрешимость всех уравнений с частными производными. Весьма сомнительно, что создание такой теории вообще возможно ввиду большого многообразия физических, геометрических и вероятностных явлений, которые моделируются уравнениями с частными производными. Поэтому исследования концентрируются вокруг некоторых конкретных уравнений, важных для приложений, как в рамках самой математики, так и для смежных дисциплин, с надеждой, что интуитивное понимание истоков этих уравнений с частными производными подскажет путь к их решению.

Перечислим некоторые важные в современных исследованиях уравнения с частными производными, с тем, чтобы иметь хотя бы начальное представление (название и вид) об этих хорошо известных уравнениях. Ниже мы обсудим происхождение для уравнений из приведенного ниже списка.

Всюду далее $\boldsymbol{x} \in D$, где D — область пространства $\mathbb{R}^n$, и $t \geqslant 0$ — время.

1) При изучении различных видов волн — упругих, звуковых, электромагнитных, а также других колебательных явлений мы приходим к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u + f(\boldsymbol{x}, t), \quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \tag{1.9}$$

где c — скорость распространения волны в данной среде,

$f(\boldsymbol{x}, t)$ — внешняя сила.

2) Процессы распространения тепла в однородном изотропном теле, так же как и явления диффузии, описываются уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + g(\boldsymbol{x}, t), \tag{1.10}$$

где a — коэффициент температуропроводности, $g(\boldsymbol{x}, t)$ — плотность тепловых источников.

3) При рассмотрении установившихся колебательных явлений или стационарного теплового состояния в однородном изотропном теле мы приходим к уравнению Пуассона

$$\Delta u = -h\left(\boldsymbol{x}\right). \tag{1.11}$$

При $h\left(\boldsymbol{x}\right) = 0$ уравнение (1.11) переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{1.12}$$

Потенциалы поля тяготения и стационарного электрического поля также удовлетворяют уравнению Лапласа, в котором отсутствуют массы и соответственно электрические заряды.

Уравнения (1.9)-(1.12) часто называют основными уравнениями математической физики. Их подробное изучение дает возможность построить теорию широкого круга физических явлений и решить ряд физических и технических задач.

Каждое из уравнений (1.9)-(1.12) имеет бесчисленное множество частных решений. При решении конкретной физической задачи необходимо из всех этих решений выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из её физического смысла. Итак, задачи математической физики состоят в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Такими дополнительными условиями чаще всего являются так называемые граничные условия, т. е. условия, заданные на некоторой части границы рассматриваемой среды, и начальные условия, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления.

1.1. Уравнения с частными производными первого порядка

1.1.1. Понятие характеристики квазилинейного уравнения первого порядка

Рассмотрим квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(\boldsymbol{x}, u), \tag{1.13}$$

где $a_i(\boldsymbol{x}, u)$, $i = 1, ..., n$, $f(\boldsymbol{x}, u)$ — известные непрерывно дифференцируемые функции в области G пространства переменных $\boldsymbol{x}, u$, причем в этой области $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$.

Пусть $u(\boldsymbol{x})$ — регулярное решение уравнения (1.13), определенное в некоторой области D пространства переменных $\boldsymbol{x}$, и пусть $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$ — гладкая кривая лежащая в D. Тогда, рассматривая решение $u(\boldsymbol{x})$ на этой кривой, получаем функцию $\tilde{u}(s) = u(\boldsymbol{x}(s))$.

Подберем кривую $\boldsymbol{x}(s)$ так, чтобы

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i(\boldsymbol{x}(s), \tilde{u}(s)), \quad i = 1, ..., n.$$

Тогда, дифференцируя функцию $\tilde{u}(s)$, получаем

$$\frac{d\tilde{u}}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}(s)) \ \frac{dx_i}{ds} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}(s)) \ a_i(\boldsymbol{x}(s), \tilde{u}(s)) = f(\boldsymbol{x}(s), \tilde{u}(s)).$$

Следовательно, искомая кривая $\boldsymbol{x}(s)$ должна быть такой, чтобы выражения

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s), \ u = \tilde{u}(s)$$

определяли траекторию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{ds} = a_i(\boldsymbol{x}, u), \ i = 1, ..., n, \\ \dfrac{du}{ds} = f(\boldsymbol{x}, u). \end{cases} \tag{1.14}$$

Определение 17. *Система уравнений (1.14) называется характеристической системой уравнения (1.13), а ее траектории в пространстве переменных ($\boldsymbol{x}$, u) — характеристиками уравнения (1.13).*

Замечание 11. Подчеркнем, что параметр s на характеристике уравнения (1.13) определен лишь с точностью до постоянного слагаемого.

Замечание 12. Согласно нашим предположениям, функции $a_i(\boldsymbol{x}, u)$, $i = 1, ..., n$, $f(\boldsymbol{x}, u)$ принадлежат классу $C^1(G)$, поэтому для системы уравнений (1.14) выполнены условия теоремы существования.

Теорема 11. *Если поверхность $S : u = u(\boldsymbol{x})$ класса C^1 в пространстве переменных ($\boldsymbol{x}$, u) такова, что, какова бы ни была точка $(\boldsymbol{x}_0, u_0) \in S$, характеристика уравнения (1.13), проходящая через $(\boldsymbol{x}_0, u_0)$, касается S в этой точке, то S является интегральной поверхностью уравнения (1.13).*

Доказательство. Пусть $(\boldsymbol{x}_0, u_0)$, $u_0 = u(\boldsymbol{x}_0)$ — произвольная точка поверхности S. Рассмотрим характеристику

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s), \ u = \tilde{u}(s)$$

уравнения (1.13), проходящую через эту точку. Таким образом, при некотором $s = s_0$

$$\boldsymbol{x}(s_0) = \boldsymbol{x}_0,\ \tilde{u}(s_0) = u_0.$$

Касательная плоскость к поверхности S в точке $(\boldsymbol{x}_0, u_0)$ имеет уравнение

$$u - u_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0)(x_i - x_{0_i}).$$

По условию теоремы характеристика, касается поверхности S в точке $(\boldsymbol{x}_0, u_0)$. Это означает, что касательный к характеристике вектор $\left(\dfrac{dx_1}{ds}(s_0), ..., \dfrac{dx_n}{ds}(s_0), \dfrac{d\tilde{u}}{ds}(s_0)\right)$ лежит в указанной плоскости, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0)\frac{dx_i}{ds}(s_0) = \frac{d\tilde{u}}{ds}(s_0). \tag{1.15}$$

Так как $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$, $u = \tilde{u}(s)$ — решение системы (1.14), то

$$\begin{aligned} &\frac{dx_i}{ds}(s_0) = a_i(\boldsymbol{x}(s_0), \tilde{u}(s_0)) = a_i(\boldsymbol{x}_0, u_0), \\ &\frac{d\tilde{u}}{ds}(s_0) = b(\boldsymbol{x}(s_0), \tilde{u}(s_0)) = f(\boldsymbol{x}_0, u_0). \end{aligned} \tag{1.16}$$

В силу (1.16) равенство (1.15) можно переписать так:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}_0, u_0)\frac{\partial u}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}_0, u_0),$$

т. е. функция $u = u(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет уравнению (1.13) при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$. Так как $(\boldsymbol{x}_0, u_0)$ — произвольная точка поверхности S, то $u = u(\boldsymbol{x})$ представляет собой решение уравнения 1.13. Теорема доказана.

Теорема 12. *Пусть $u = u(\boldsymbol{x})$ — решение уравнения (1.13), определенное в некоторой области D, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$, $u = \tilde{u}(s)$*

$(\alpha < s < \beta)$ — решение системы (1.14). Если при этом кривая $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$ $(\alpha < s < \beta)$ лежит в D и $\tilde{u}(s_0) = u(\boldsymbol{x}(s_0))$, то

$$u(\boldsymbol{x}(s)) \equiv \tilde{u}(s).$$

Доказательство. Пусть $v(s) = u(\boldsymbol{x}(s))$. Тогда, т.к. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$, $u = \tilde{u}(s)$ — решение системы уравнений (1.14), то

$$\frac{dv}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}(s))\frac{dx_i}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}(s))a_i(\boldsymbol{x}(s), \tilde{u}(s)). \qquad (1.17)$$

Так как $u(\boldsymbol{x}(s))$ — решение уравнения (1.13), то, в силу (1.14), из равенства (1.17) получим

$$\frac{dv}{ds} = f(\boldsymbol{x}(s), \tilde{u}(s)) = \frac{d\tilde{u}}{ds},$$

откуда следует, что

$$v(s) = \tilde{u}(s) + \mathrm{const}.$$

Но $\tilde{u}(s_0) = u(\boldsymbol{x}(s_0))$, т. е. $v(s_0) = \tilde{u}(s_0)$. Следовательно, $\mathrm{const} = 0$ и $v(s) \equiv \tilde{u}(s)$. Теорема доказана.

Замечание 13. Любая интегральная поверхность уравнения (1.13) образована некоторым семейством характеристик.

1.1.2. Интегрирование линейных уравнений первого порядка

Линейное неоднородное уравнение с частными производными первого порядка имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(\boldsymbol{x}), \qquad (1.18)$$

где $a_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, ..., n$, $f(\boldsymbol{x})$ — известные достаточно гладкие функции в области D пространства переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$, причем в этой области $\sum_{i=1}^{n} a_i^2(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

Если в правой части уравнения (1.18) функция $f(\boldsymbol{x}) \equiv 0$, т. е. это уравнение имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \tag{1.19}$$

то такое уравнение называется линейным однородным уравнением с частными производными первого порядка.

Выпишем характеристическую систему, соответствующую уравнению (1.19):

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i(\boldsymbol{x}),\ \ i = 1, ..., n \tag{1.20}$$

или

$$\frac{dx_1}{a_1(\boldsymbol{x})} = \frac{dx_2}{a_2(\boldsymbol{x})} = ... = \frac{dx_n}{a_n(\boldsymbol{x})}. \tag{1.21}$$

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1.21) можно переписать в следующем (нормальном) виде (предполагая, что $a_n(\boldsymbol{x}) \neq 0$ в D):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_n} = \dfrac{a_1(\boldsymbol{x})}{a_n(\boldsymbol{x})}, \\ \dfrac{dx_2}{dx_n} = \dfrac{a_2(\boldsymbol{x})}{a_n(\boldsymbol{x})}, \\ \dots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dx_n} = \dfrac{a_{n-1}(\boldsymbol{x})}{a_n(\boldsymbol{x})}. \end{cases} \tag{1.22}$$

Как известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение системы (1.22) можно записать так:

$$x_i = x_i(x_n, C_1, C_2, ..., C_{n-1}),\ \ C_i \in \mathbb{R},\ \ i = 1, ..., n-1. \tag{1.23}$$

Таким образом (1.23) — это общий интеграл системы (1.22).

Выражение (1.23) можно переписать относительно постоянных C_i:

$$C_i = \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n),\ \ i = 1, ..., n-1. \tag{1.24}$$

Определение 18. *Первым интегралом системы (1.21) называется функция $\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ тождественно равная постоянной на интегральной кривой системы (1.21).*

Другими словами (1.24) определяет $(n-1)$ независимых первых интегралов системы (1.21) (ранг матрицы $\left\|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right\|$ равен $n-1$ в D).

Теорема 13. *Всякое решение $u = u(\boldsymbol{x})$ уравнения (1.19) является первым интегралом системы (1.21). И обратно, всякий первый интеграл системы (1.21) $\varphi(x_1, ..., x_n)$ является решением уравнения (1.19).*

Теорема 14. *Решение $u = u(\boldsymbol{x})$ уравнения (1.19) представимо в виде $u = F(\varphi_1, ..., \varphi_{n-1})$, где F — некоторая непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, $\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}$ — независимые первые интегралы системы (1.21).*

Пример 11. Решить уравнение $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

Решение. Составляем характеристическую систему для данного уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = x, \\ \dfrac{dy}{ds} = y. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем первый интеграл характеристической системы

$$\varphi(x, y) = \frac{x}{y} = C, \; C \in \mathbb{R}.$$

Тогда общее решение исходного уравнения можно записать в следующем виде:

$$u(x, y) = F\left(\frac{x}{y}\right),$$

где F — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

1.1.3. Интегрирование квазилинейных уравнений первого порядка

Рассмотрим теперь квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(\boldsymbol{x}, u), \tag{1.25}$$

где $a_i(\boldsymbol{x}, u)$, $i = 1, ..., n$, $f(\boldsymbol{x}, u) \in C(G)$, причем в области G пространства переменных $\boldsymbol{x}, u$ имеем $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$.

Напомним, что характеристическая система уравнения (1.25) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{ds} = a_i(\boldsymbol{x}, u), \;\; i = 1, ..., n, \\[2ex] \dfrac{du}{ds} = f(\boldsymbol{x}, u). \end{cases} \tag{1.26}$$

Будем искать решение уравнения (1.25) в неявном виде

$$v(x_1, ..., x_n, u) = 0. \tag{1.27}$$

Продифференцируем (1.27) по x_i, получим

$$\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0, \;\; i = 1, ..., n. \tag{1.28}$$

Домножив теперь обе части уравнения (1.25) на $\dfrac{\partial v}{\partial u}$, и, используя равенства (1.28), приходим к линейному однородному уравнению с частными производными первого порядка

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}, u)\frac{\partial v}{\partial x_i} + f(\boldsymbol{x}, u)\frac{\partial v}{\partial u} = 0 \tag{1.29}$$

относительно неизвестной функции $v = v(\boldsymbol{x}, u)$.

Далее действуем как в предыдущем разделе. Составляем характеристическую систему уравнения (1.29) и находим ее независимые первые интегралы $\varphi_1(\boldsymbol{x}, u), ..., \varphi_n(\boldsymbol{x}, u)$. Тогда общее решение уравнения (1.29) можно записать в виде $v = F(\varphi_1, ..., \varphi_n)$, где F — некоторая непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Наконец, учитывая (1.27), получаем общее решение исходного уравнения (1.25) в неявном виде

$$F(\varphi_1, ..., \varphi_n) = 0. \tag{1.30}$$

Отметим, что если u входит только в один из первых интегралов $\varphi_1, ..., \varphi_n$, например, в последний, т. е. $\varphi_n = \varphi_n(\boldsymbol{x}, u)$, $\varphi_i = \varphi_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, ..., n-1$, то общее решение уравнения (1.25) можно записать в следующем виде:

$$\varphi_n(\boldsymbol{x}, u) = f(\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}), \tag{1.31}$$

где f — некоторая непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов Разрешив данное равенство относительно u (конечно если это возможно), получим решение уравнения (1.25) в явном виде.

Пример 12. Решить уравнение $xz\dfrac{\partial z}{\partial x} + yz\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$.

Решение. Будем искать решение в виде $v(x, y, z) = 0$, где v — неизвестная функция переменных x, y, z. Дифференцируя последнее выражение по x и y, получим соответственно

$$\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Теперь умножим исходное уравнение на $\dfrac{\partial v}{\partial z}$ и, учитывая последние два равенства, имеем линейное однородное уравнение с частными производными первого порядка

$$xz\frac{\partial v}{\partial x} + yz\frac{\partial v}{\partial y} + x\frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Запишем характеристическую систему этого уравнения:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{x}.$$

Отсюда находим два первых интеграла

$$\varphi_1 = z^2 - 2x$$

и

$$\varphi_2 = \frac{x}{y}.$$

Поскольку z входит явно только в один из первых интегралов (в первый), то общее решение исходного уравнения можно записать в виде

$$z^2 - 2x = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

или

$$z(x,y) = \pm\sqrt{f\left(\frac{x}{y}\right) + 2x},$$

где f — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

1.1.4. Задача Коши для квазилинейного уравнения первого порядка

Как мы уже убедились, уравнения с частными производными первого порядка допускают бесконечно много решений. Для однозначного выделения решения необходимо к уравнению присоединить начальные условия.

Рассмотрим квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка в случае двух пространственных переменных x и y

$$a_1(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y,u), \tag{1.32}$$

где $a_i(x,y,u)$, $i=1,2$, $f(x,y,u)$ — известные гладкие функции, причем $a_1^2+a_2^2\neq 0$.

Пусть задана достаточно гладкая кривая l в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ u = u(t), \end{cases} \tag{1.33}$$

причем $x_t^2+y_t^2\neq 0$. Обозначим через l_0 проекцию кривой l на плоскость Oxy.

Задача Коши для уравнения (1.32) ставится так: в окрестности проекции l_0 найти интегральную поверхность уравнения (1.32), проходящую через заданную кривую l, т. е. найти такое решения уравнения (1.32), которое принимает заданные значения в точках кривой l_0.

Для решения задачи Коши проведем через каждую точку кривой l характеристику, т. е. интегральную кривую системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = a_1(x,y,u), \\ \dfrac{dy}{ds} = a_2(x,y,u), \\ \dfrac{du}{ds} = f(x,y,u). \end{cases} \tag{1.34}$$

Заметим, что в некоторой окрестности кривой l это можно сделать единственным образом. Таким образом мы получили семейство характеристических кривых, зависящих еще от параметра t:

$$x = x(s,t),\ y = y(s,t),\ u = u(s,t). \tag{1.35}$$

Кривые (1.35) образуют поверхность $u=u(x,y)$, если из первых двух уравнений (1.35) можно выразить s и t через x и y. Для этого достаточно, чтобы на кривой l не обращался в нуль

якобиан
$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dy}{dt} \end{vmatrix} = a_1\frac{dy}{dt} - a_2\frac{dx}{dt}. \tag{1.36}$$

Если на l выполняется условие $\Delta \neq 0$, то u является функцией x и y. Нетрудно видеть, что эта функция есть решение уравнения (1.32). Действительно, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции и уравнениями (1.34), получим
$$\frac{du}{ds} = a_1\frac{\partial u}{\partial x} + a_2\frac{\partial u}{y}.$$

Но $\dfrac{du}{ds} = f$ и, следовательно, $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.32). Единственность решения задачи Коши следует из того, что характеристическая кривая, имеющая одну общую точку с интегральной поверхностью, целиком лежит на этой поверхности. Это значит, что любая интегральная поверхность, проходящая через кривую l, целиком содержит семейство характеристик, проходящих через l и, следовательно, совпадает с $u(x, y)$.

Если $\Delta = 0$ всюду на кривой l и если существует интегральная поверхность $u = u(x, y)$ с непрерывными производными первого порядка, проходящая через l, то эта кривая должна быть характеристикой. В самом деле, в этом случае параметр t на кривой l можно выбрать так, что вдоль этой кривой $a_1 = \dfrac{dx}{dt}$, $a_2 = \dfrac{dy}{dt}$. Далее, подставляя в $u(x, y)$ выражения $x = x(t)$, $y = y(t)$ и дифференцируя по t, будем иметь $\dfrac{du}{dt} = a_1\dfrac{\partial u}{\partial x} + a_2\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Отсюда, учитывая, что $u(x, y)$ есть решения уравнения (1.32), получим $\dfrac{du}{dt} = f$. Следовательно l является характеристикой. Но, если l — характеристика, то через нее проходит не только одна, а бесконечно много интегральных поверхностей. Действительно, проведем через любую точку кривой l кривую l', которая уже не является характеристикой. Интегральная поверхность, проходящая через l', обязательно содержит характеристику l. Таким образом, множество решений задачи Коши для характеристики l определяется множеством кривых l'. Все интегральные поверхности, проходящие через кривые этого множества, содержат характеристику l. Следовательно, характеристики являются линиями пересечения интегральных поверхностей (линиями ветвления), тогда как через нехарактеристическую кривую не может проходить более одной интегральной поверхности.

Сформулируем полученные результаты.

Теорема 15. *Если $\Delta \neq 0$ всюду на начальной кривой l, то задача Коши для уравнения (1.32) имеет одно и только одно решение. Если же $\Delta = 0$ всюду на l, то для того чтобы задача Коши имела решение, кривая l должна быть характеристикой. В этом случае задача Коши имеет бесконечно много решений.*

Пример 13. Рассмотрим уравнение

$$(y^2 - u)\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u. \tag{1.37}$$

Система (1.34) имеет вид

$$\frac{dx}{ds} = y^2 - u, \ \frac{dy}{ds} = y, \ \frac{du}{ds} = u \tag{1.38}$$

и ее решение, выраженное через начальные значения (x_0, y_0, u_0) переменных (x, y, u) при $s = 0$, будет

$$x = \left(\frac{1}{2}{y^2}_0 e^s - u_0\right)e^s + x_0 + \left(u_0 - \frac{1}{2}{y^2}_0\right), \ y = y_0 e^s, \ u = u_0 e^s. \tag{1.39}$$

Положим, что кривая l, через которую должна проходить интегральная поверхность, задана уравнениями

$$x_0 = 1,\ y_0 = t,\ u_0 = \frac{1}{2}t^2. \tag{1.40}$$

Подставив (1.40) в (1.39), получим

$$x = \frac{t^2}{2}\left(e^s - 1\right)e^s + 1,\ y = te^s,\ u = \frac{t^2}{2}e^s.$$

Определитель

$$\Delta = \frac{dx}{ds}\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt}\frac{dy}{ds} = \frac{t^2}{2}e^{2s},$$

не обращается в нуль при $s = 0$ и $t \neq 0$. Исключая s и t, мы получим уравнение интегральной поверхности

$$u = 1 - x + \frac{y^2}{2}.$$

1.2. Уравнения с частными производными второго порядка

1.2.1. Понятие характеристической формы и классификация линейных уравнений второго порядка

Рассмотрим линейное уравнение с частными производными второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x})u = f(\boldsymbol{x}), \tag{1.41}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, b_i, c, f — заданные в области $D \subset \mathbb{R}^n$ действительные гладкие функции точки $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$. Предполагается, что хотя бы один из коэффициентов a_{ij} в точках $\boldsymbol{x} \in D$ отличен от нуля, иначе уравнение перестает быть уравнением второго порядка, т. е. в указанных точках порядок уравнения (1.41) вырождается.

Определение 19. *Форма порядка m*

$$K(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \sum_{i_1 \geqslant 0, ..., i_n \geqslant 0} \frac{\partial F}{\partial p_{i_1 ... i_n}} \lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_n^{i_n}, \ \sum_{j=1}^{n} i_j = m \quad (1.42)$$

относительно действительных параметров $\lambda_1, ..., \lambda_n$ называется характеристической формой соответствующей уравнению (1.1).

В случае линейного уравнения второго порядка характеристическая форма (1.42) является квадратичной:

$$Q(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \lambda_i \lambda_j. \quad (1.43)$$

В каждой точке $\boldsymbol{x} \in D$ квадратичная форма Q при помощи невырожденного аффинного преобразования переменных $\lambda_i = \lambda_i(\xi_1, ..., \xi_n)$, $i = 1, ..., n$ может быть приведена к каноническому виду

$$Q(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i^2, \quad (1.44)$$

где $a_i = -1, 0, 1$, $i = 1, ..., n$, причем число отрицательных и нулевых коэффициентов формы Q не зависит от способа приведения этой формы к каноническому виду. На этом факте основана классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка.

Определение 110. *Уравнение (1.41) принадлежит эллиптическому типу в точке $\boldsymbol{x} \in D$, если в этой точке квадратичная форма Q положительно определенная или отрицательно определенная, т. е. все $a_i = 1$ или все $a_i = -1$, $i = 1, ..., n$.*

Уравнение (1.41) принадлежит гиперболическому типу в точке $\boldsymbol{x} \in D$, если в этой точке в квадратичной форме Q имеем все коэффициенты, кроме одного, определенного знака, а оставшийся один коэффициент противоположного знака.

Уравнение (1.41) принадлежит ультрагиперболическому типу в точке $\boldsymbol{x} \in D$, если в этой точке квадратичная форма Q имеет больше одного положительного коэффициента и более одного отрицательного, причем все коэффициенты отличны от нуля.

Уравнение (1.41) принадлежит параболическому типу в точке $\boldsymbol{x} \in D$, если в этой точке квадратичная форма Q имеет только один коэффициент, равный нулю, все же другие коэффициенты имеют одинаковые знаки.

Уравнение (1.41) принадлежит эллиптическому типу, соответственно гиперболическому типу и т.д. в области D, если во всех точках этой области оно принадлежит эллиптическому типу, соответственно гиперболическому типу и т.д.

Определение 111. *Эллиптическое в области D уравнение (1.41) называется равномерно эллиптическим, если существуют действительные числа k_1, k_2, отличные от нуля и одного знака такие, что*

$$k_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leqslant Q(\lambda_1, ..., \lambda_n) \leqslant k_2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \ \forall \ \boldsymbol{x} \in D.$$

Когда в разных точках области D уравнение (1.41) принадлежит различным типам, то оно является уравнением смешанного типа в этой области.

Если коэффициенты a_{ij} постоянные, то принадлежность уравнения к тому или иному типу не зависит от значений независимых переменных.

Пример 14. Для многомерного волнового уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \Delta u, \ \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

составим квадратичную форму

$$Q(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) = -\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - ... - \lambda_n^2 + \lambda_{n+1}^2.$$

В соответствии с классификацией данное уравнение принадлежит гиперболическому типу.

Пример 15. Рассмотрим уравнение Лапласа в многомерном случае:

$$\Delta u = 0, \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Квадратичная форма имеет вид

$$Q(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \lambda_1^2 + ... + \lambda_n^2,$$

следовательно, исходное уравнение принадлежит эллиптическому типу.

Пример 16. Для уравнения теплопроводности вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

характеристическая форма имеет вид

$$Q(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) = -\lambda_1^2 - ... - \lambda_n^2 + 0 \cdot \lambda_{n+1}^2,$$

таким образом, уравнение теплопроводности является уравнением параболического типа.

Пример 17. Рассмотрим уравнение Трикоми:

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Коэффициенты характеристической формы

$$Q = y\lambda_1^2 + \lambda_2^2$$

зависят от y, следовательно, данное уравнение в разных точках области D имеет разный тип, т. е. уравнение Трикоми является уравнением с частными производными смешанного типа.

1.2.2. Классификация нелинейных уравнений второго порядка

Рассмотрим нелинейное уравнение с частными производными второго порядка

$$F\left(\boldsymbol{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ... \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, ...\right) = 0, \ \ i, j = 1, ..., n, \quad (1.45)$$

где $F(\boldsymbol{x}, \ldots, p_{i_1,\ldots,i_n}, \ldots)$ — заданная гладкая действительная функция точек $\boldsymbol{x}$ области D и действительных переменных $p_{i_1,\ldots,i_n}$ с неотрицательными целочисленными индексами $i_1, ..., i_n$, $\sum\limits_{j=1}^{n} i_j = k$, $k = 0, 1, 2$, и, по крайней мере, одна из производной которой

$$\frac{\partial F}{\partial p_{i_1,\ldots,i_n}}, \; \sum_{j=1}^{n} i_j = 2$$

отлична от нуля.

Классификация уравнения (1.45) в нелинейном случае происходит аналогичным образом, что и классификация уравнения (1.41) по характеру характеристической формы

$$Q(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j}} \lambda_i \lambda_j. \tag{1.46}$$

Поскольку коэффициенты формы (1.46) зависят от искомого решения и его производных, то классификация имеет смысл лишь для этого решения.

Пример 18. Определить тип уравнения

$$u_{xx}^2 + (u_{xx} - 2)u_{xy} - u_{yy}^2 = 0$$

на решении $u = x^2 + y^2$.

Решение. Характеристическая форма

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \lambda_1^2 + \frac{\partial F}{\partial u_{xy}} \lambda_1 \lambda_2 + \frac{\partial F}{\partial u_{yy}} \lambda_2^2$$

для данного уравнения примет вид

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = (2u_{xx} + u_{xy})\lambda_1^2 + (u_{xx} - 2)\lambda_1 \lambda_2 - 2u_{yy}\lambda_2^2.$$

На решении $u = x^2 + y^2$ имеем

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = 4\lambda_1^2 - 4\lambda_2^2$$

или

$$Q(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 - \xi_2^2,\ \xi_i = 2\lambda_i,\ i = 1, 2.$$

Следовательно, данное уравнение принадлежит гиперболическому типу на данном решении.

1.2.3. Классификация систем двух линейных уравнений первого порядка

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с частными производными первого порядка

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}(\boldsymbol{x})u_{x_i} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_{1i}(\boldsymbol{x})v_{x_i} + c_1(\boldsymbol{x})u + d_1(\boldsymbol{x})v = f_1(\boldsymbol{x}), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}(\boldsymbol{x})u_{x_i} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_{2i}(\boldsymbol{x})v_{x_i} + c_2(\boldsymbol{x})u + d_2(\boldsymbol{x})v = f_2(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{1.47}$$

где a_{ji}, b_{ji}, $i = 1, ..., n$, c_j, d_j, f_j, $j = 1, 2$ — заданные в области $D \subset \mathbb{R}^n$ действительные гладкие функции, зависящие от $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$.

Классификация систем вида (1.47) происходит по характеру характеристической формы (характеристического детерминанта)

$$Q(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}\lambda_i & \sum\limits_{i=1}^{n} b_{1i}\lambda_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}\lambda_i & \sum\limits_{i=1}^{n} b_{2i}\lambda_i \end{vmatrix} \tag{1.48}$$

точно так же как и классификация одного линейного уравнения второго порядка (1.41).

Пример 19. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 5u_x + 22,5v_x + 2u_y + v_y - 6u = 0, \\ 5v_x + 2u_y + 3v_y - 2xu = 0. \end{cases}$$

Выпишем характеристическую форму, соответствующую данной системе

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{vmatrix} 5\lambda_1 + 2\lambda_2 & 22,5\lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_2 & 5\lambda_1 + 3\lambda_2 \end{vmatrix}$$

или

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = (5\lambda_1 - 2\lambda_2)^2.$$

Отсюда

$$Q(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + 0 \cdot \xi_2^2,$$

где $\xi_1 = 5\lambda_1 - 2\lambda_2$, $\xi_2 = \xi_2(\lambda_1, \lambda_2)$ — линейно-независимая с ξ_1. Следовательно, данная система уравнений принадлежит параболическому типу.

1.2.4. Приведение к каноническому виду линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное уравнение с частными производными второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x_1, ..., x_n). \qquad (1.49)$$

Здесь $a_{ij} = a_{ji}$, b_i, $i, j = 1, ..., n$, c — известные постоянные, причем один из a_{ij} не равен нулю, f — заданная в области $D \subset \mathbb{R}^n$ гладкая действительная функция переменных $x_1, ..., x_n$.

Введем вместо $x_1, ..., x_n$ новые независимые переменные $\xi_1, ..., \xi_n$ при помощи линейного преобразования

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i, \quad k = 1, ..., n. \qquad (1.50)$$

Мы предполагаем, что преобразование (1.50) невырожденное, т. е. что определитель $|c_{ki}|$ не равен нулю. Производные по старым переменным пересчитаются через производные по новым переменным следующими формулами:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \frac{\partial v}{\partial \xi_k}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} c_{ki} c_{lj} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_k \partial \xi_l}, \tag{1.51}$$

где $u(x_1, ..., x_n) = v(\xi_1(x_1, ..., x_n), ..., \xi_n(x_1, ..., x_n))$. Подставив (1.51) в уравнение (1.49), получим

$$\sum_{k,l=1}^{n} \bar{a}_{kl} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k \frac{\partial v}{\partial \xi_k} + cv = f_1(\xi_1, ..., \xi_n), \tag{1.52}$$

где

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} c_{ki} c_{lj}, \quad \bar{b}_k = \sum_{i=1}^{n} b_i c_{ki}. \tag{1.53}$$

Нетрудно проверить, что формулы преобразования (1.51) коэффициентов при вторых производных от функции u при замене независимых переменных по формулам (1.50) совпадают с формулами преобразования коэффициентов квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j, \tag{1.54}$$

если в ней произвести линейное невырожденное преобразование

$$t_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik} \tau_i, \quad k = 1, ..., n, \tag{1.55}$$

приводящее её к виду

$$\sum_{k,l=1}^{n} \bar{a}_{kl} \tau_k \tau_l. \tag{1.56}$$

В алгебре доказывается, что всегда можно подобрать коэффициенты c_{ki} так, чтобы квадратичная форма (1.54) привелась к каноническому виду, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \tau_k^2, \tag{1.57}$$

или, иначе говоря, в (1.56) $\bar{a}_{kl} = 0$ при $k \neq l$ и $\bar{a}_{kk} = \lambda_k$ [3]. Коэффициенты λ_k равны ± 1 или 0. Знаки коэффициентов λ_k и определяют тип уравнения (1.49). Таким образом преобразованное уравнение (1.52) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_k^2} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \frac{\partial v}{\partial \xi_i} + cv = f_1(\xi_1, ..., \xi_n). \tag{1.58}$$

Этот вид уравнения (1.49) называется его каноническим видом.

Положим, что все λ_k отличны от нуля, т. е. что уравнение (1.49) не параболического типа и покажем, что в этом случае при помощи преобразования функции v можно освободиться от производных первого порядка. С этой целью вместо v введем новую искомую функцию w по формуле

$$v = w\ e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\bar{b}_k}{\lambda_k}\xi_k}.$$

Подставив это в уравнение (1.58), получим, как нетрудно проверить, уравнение вида

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_k^2} + c_1 w = f_2(\xi_1, ..., \xi_n).$$

Для уравнения эллиптического типа все $\lambda_k = 1$ или $\lambda_k = -1$, и, умножая, если надо, обе части уравнения на -1, мы можем считать, что все $\lambda_k = 1$. Таким образом, сохраняя прежние обозначения, мы можем утверждать, что всякое линейное уравнение второго порядка эллиптического типа с постоянными коэффициентами может быть приведено к виду

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + c_2 u = f_3(x_1, ..., x_n). \tag{1.59}$$

[3]Согласно закону инерции для квадратичных форм число положительных и отрицательных коэффициентов λ_k инвариантно относительно линейного преобразования, приводящего квадратичную форму (1.54) к виду (1.57).

В случае уравнения гиперболического типа будем считать, что имеется $n+1$ независимых переменных, и положим $\xi_{n+1} = t$. Тогда всякое линейное уравнение гиперболического типа с постоянными коэффициентами приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + c_3 u = f_4(x_1, ..., x_n, t). \tag{1.60}$$

В случае уравнения (1.49) с переменными коэффициентами для каждой точки $(x_1^0, ..., x_n^0)$ области D можно указать такое невырожденное преобразование независимых переменных, которое приводит уравнение (1.49) к каноническому виду в этой точке. Для каждой точки $(x_1^0, ..., x_n^0)$ имеется, вообще говоря, свое преобразование независимых переменных, приводящее уравнение к каноническому виду. Дифференциальное уравнение с числом независимых переменных больше двух (если исключить случай постоянных коэффициентов), вообще говоря, невозможно привести с помощью преобразования независимых переменных к каноническому виду даже в как угодно малой области. В случае же двух независимых переменных такое преобразование независимых переменных существует при весьма общих предположениях о коэффициентах уравнения, как будет показано в следующем разделе.

1.2.5. Приведение к каноническому виду линейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными

Рассмотрим линейное уравнение с частными производными второго порядка (1.41) в случае $n = 2$:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + gu = f, \tag{1.61}$$

где мы приняли обозначения

$$a = a(x, y) = a_{11}(x, y),\ b = b(x, y) = a_{12}(x, y) = a_{21}(x, y),$$

$$c = c(x,y) = a_{22}(x,y),\ d = d(x,y) = b_1(x,y),$$
$$e = e(x,y) = b_2(x,y),\ f = f(x,y).$$

Определение 112. *Кривая* $\varphi(x,y) = \text{const}$, *где* φ *— решение уравнения*

$$a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{1.62}$$

называется характеристической кривой уравнения (1.61) (характеристика).

Определение 113. *Направление* (dy, dx), *определенное из равенства*

$$a(dy)^2 - 2bdxdy + c(dy)^2 = 0$$

называется характеристическим направлением (касательный вектор к характеристической кривой).

Уравнению (1.61) соответствует квадратичная форма

$$a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1\lambda_2 + c\lambda_2^2. \tag{1.63}$$

Таким образом дифференциальное уравнение (1.61) принадлежит:

1) гиперболическому типу, если $b^2 - ac > 0$ (квадратичная форма (1.63) знакопеременная); в каждой точке гиперболичности существует два различных характеристических направления;

2) параболическому типу, если $b^2 - ac = 0$ (квадратичная форма (1.63) знакопостоянная); в области параболичности одно действительное характеристическое направление;

3) эллиптическому типу, если $b^2 - ac < 0$ (квадратичная форма (1.63) знакоопределенная); в области эллиптичности действительных характеристических направлений нет.

Пример 110. Для двумерного уравнения Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

уравнение для определения характеристической кривой имеет вид

$$(\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2 = 0.$$

Действительных функций, удовлетворяющих данному уравнению не существует.

Пример 111. Для однородного одномерного (одна пространственная переменная) волнового уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

уравнение (1.62) имеет вид

$$(\varphi_t)^2 - (\varphi_x)^2 = 0$$

или, что то же самое,

$$\varphi_t - \varphi_x = 0,\ \ \varphi_t + \varphi_x = 0.$$

Решениями этих уравнений с частными производными первого порядка очевидно являются

$$\varphi_1(x,t) = f(x+t),\ \ \varphi_2(x,t) = g(x-t),$$

где f и g — произвольные гладкие действительные функции. Таким образом для одномерного волнового уравнения кривые

$$f(x+t) = \mathrm{const},\ \ g(x-t) = \mathrm{const}$$

являются характеристиками.

Пример 112. Для одномерного однородного уравнения теплопроводности

$$u_t - u_{xx} = 0$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$-(\varphi_x)^2 = 0.$$

Очевидно, что его решение

$$\varphi = f(t),$$

где f — произвольная гладкая функция. Следовательно имеем одну действительную характеристику

$$f(t) = \text{const}.$$

Теорема 16. *Пусть коэффициенты a, b, c уравнения (1.61) достаточно гладкие в области $D \subset \mathbb{R}^2$ действительный функции. Тогда можно найти невырожденное преобразование $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, ξ, $\eta \in C^2(D)$ при помощи которого уравнение (1.61) приводится к одному из следующих канонических видов:*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + A\frac{\partial v}{\partial \xi} + B\frac{\partial v}{\partial \eta} + Cv = H \tag{1.64}$$

в эллиптическом случае,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + A\frac{\partial v}{\partial \xi} + B\frac{\partial v}{\partial \eta} + Cv = H \tag{1.65}$$

или

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + A_1\frac{\partial v}{\partial \xi} + B_1\frac{\partial v}{\partial \eta} + C_1 v = H_1 \tag{1.66}$$

в гиперболическом случае и

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + A\frac{\partial v}{\partial \xi} + B\frac{\partial v}{\partial \eta} + Cv = H \tag{1.67}$$

в параболическом случае, где $v(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$.

Доказательство. Введем вместо (x, y) новые независимые переменные $(\xi,\ \eta)$. Пусть

$$\xi = \xi(x, y), \ \ \eta = \eta(x, y) \tag{1.68}$$

— дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем якобиан

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.69}$$

В результате такой замены, частные производные первого и второго порядков по x и y преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}, \ \ \frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \xi_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\xi_x \eta_x \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \eta_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \xi_{xx} \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_{xx} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \xi_x \xi_y \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \eta_x \eta_y \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \xi_{xy} \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_{xy} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \xi_y^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\xi_y \eta_y \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \eta_y^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \xi_{yy} \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_{yy} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

где $\xi_x = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$, $\xi_{xx} = \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ и т.д.

В новых независимых переменных ξ и η уравнение (1.61) запишется так:

$$a_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2b_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + c_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + e_1 \frac{\partial v}{\partial \eta} + g_1 v = f_1, \tag{1.70}$$

где

$$\begin{cases} a_1(\xi, \eta) = a \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2b \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \dfrac{\partial \xi}{\partial y} + c \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \\ b_1(\xi, \eta) = a \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \dfrac{\partial \eta}{\partial x} + b \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x} \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \right) + c \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \dfrac{\partial \eta}{\partial y}, \\ c_1(\xi, \eta) = a \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2b \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + c \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2, \\ d_1(\xi, \eta) = a \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2b \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + c \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + d \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + e \dfrac{\partial \xi}{\partial y}, \\ e_1(\xi, \eta) = a \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2b \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + c \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + d \dfrac{\partial \eta}{\partial x} + e \dfrac{\partial \eta}{\partial y}, \\ g_1(\xi, \eta) = g, \\ f_1(\xi, \eta) = f, \end{cases} \tag{1.71}$$

$x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ — преобразование обратное к $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$.

Непосредственной подстановкой нетрудно проверить, что

$$b_1^2 - a_1 c_1 = (b^2 - ac) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2. \tag{1.72}$$

Отсюда легко видеть, что преобразование независимых переменных не меняет типа уравнения.

В преобразовании (1.68) в нашем распоряжении две функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$. Покажем, что их можно выбрать так, что преобразованное уравнение (1.70) примет один из канонических видов (1.64)–(1.67).

1) *Гиперболический тип.* Уравнение (1.61) гиперболического типа, если $b^2 - ac > 0$. Уравнения такого типа имеют две характеристики. Пусть $\xi(x, y)$, $\eta(x, y) \in C^2$ являются решениями уравнения $a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0$, причем якобиан $\dfrac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} &a\xi_x + (b + \sqrt{b^2 - ac})\xi_y = 0, \\ &a\eta_x + (b - \sqrt{b^2 - ac})\eta_y = 0. \end{aligned} \tag{1.73}$$

В силу выбора $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ из (1.71) следует, что $a_1 = c_1 = 0$, $b_1 \neq 0$. Разделив (1.70) на $2b_1$, получаем уравнение (1.65), в котором

$$A = \frac{d_1}{2b_1},\ B = \frac{e_1}{2b_1},\ C = \frac{g_1}{2b_1},\ H = \frac{f_1}{2b_1}.$$

В результате замены $\alpha = \xi + \eta$, $\beta = \xi - \eta$ нетрудно получить (1.66).

2) *Параболический тип.* Уравнение (1.61) параболического типа, если $b^2 - ac = 0$. Функции $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, приводящие уравнение (1.61) к каноническому виду, выберем так, чтобы $\xi(x, y)$ являлась решением уравнения

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0,$$

т. е.

$$a\xi_x + b\xi_y = 0, \tag{1.74}$$

а $\eta(x, y)$ удовлетворяла условию

$$a\eta_x^2 + 2b\eta_x\varphi_y + c\eta_y^2 \neq 0.$$

При таком выборе $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ очевидно, что $a_1 = 0$, $c_1 \neq 0$. Покажем, что $b_1 = 0$. Имеем

$$b_1 = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y =$$

$$= (a\xi_x + b\xi_y)\eta_x + (b\xi_x + c\xi_y)\eta_y = 0,$$

т.к. имеет место (1.74) и равенство $b\xi_x + c\xi_y$, вытекающее из уравнения

$$a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0$$

и условия $b^2 - ac = 0$. Разделив уравнение (1.70) на $c_1 \neq 0$, получаем уравнение (1.67), в котором

$$A = \frac{d_1}{c_1},\ B = \frac{e_1}{c_1},\ C = \frac{g_1}{c_1},\ H = \frac{f_1}{c_1}.$$

3) *Эллиптический тип.* Уравнение (1.61) эллиптического типа, если $b^2 - ac < 0$. Будем считать, что коэффициенты a, b и c являются аналитическими функциями от x и y [4]. Пусть $\varphi = \xi + i\eta = \text{const}$ — решение уравнения

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0, \tag{1.75}$$

т. е.

$$a(\xi_x + i\eta_x)^2 + 2b(\xi_x + i\eta_x)(\xi_y + i\eta_y) + c(\xi_y + i\eta_y)^2 = 0.$$

[4] Функция $F(x, y)$ переменных x и y называется аналитической в точке (x_0, y_0), если она разлагается в степенной ряд

$$F(x, y) = \sum_{p,q=0}^{\infty} a_{pq}(x - x_0)^p(y - y_0)^q,$$

сходящийся при достаточно малых $(x - x_0)$, $(y - y_0)$.

Приравнивая действительную и мнимую части последнего уравнения к нулю, получаем систему

$$\begin{cases} a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 - a\eta_x - 2b\eta_x\eta_y - c\eta_y^2 = 0, \\ a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y = 0 \end{cases}$$

и, следовательно, разделив уравнение (1.70) на a_1, получаем уравнение (1.64), в котором

$$A = \frac{d_1}{a_1},\ B = \frac{e_1}{a_1},\ C = \frac{g_1}{a_1},\ H = \frac{f_1}{a_1}.$$

Искомую замену $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, приводящее исходное уравнение эллиптического типа к каноническому виду можно определить из уравнения (1.75). Обозначим

$$\lambda_1 = \frac{-b + i\sqrt{ac - b^2}}{a},\ \lambda_2 = \frac{-b - i\sqrt{ac - b^2}}{a}$$

и перепишем уравнение (1.75) в следующем виде:

$$a(\varphi_x - \lambda_1\varphi_y)(\varphi_x - \lambda_2\varphi_y) = 0.$$

Т.к. $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, то

$$a(\varphi_x - \lambda_1\varphi_y)^2 = 0.$$

Поскольку $\varphi = \xi + i\eta$, то

$$\xi_x + i\eta_x - \left(\frac{-b + i\sqrt{ac - b^2}}{a}\right)(\xi_y + i\eta_y) = 0.$$

Приравнивая к нулю действительную и мнимую часть, получаем систему уравнений для нахождения функций $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$

$$\begin{cases} a\xi_x + b\xi_y + \sqrt{ac - b^2}\eta_y = 0, \\ a\eta_x + b\eta_y - \sqrt{ac - b^2}\xi_y = 0. \end{cases} \qquad (1.76)$$

Мы рассмотрели уравнения трех типов и показали, что в результате невырожденной замены переменных (1.73), (1.74), (1.76), представляющие собой линейные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка, исходное уравнение (1.61) может быть приведено к одному из уравнений (1.65), (1.67), (1.64) соответственно.

Поскольку вопрос о существовании решений линейных дифференциальных уравнений первого порядка связан с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и известно, что при достаточной гладкости коэффициентов a, b и c, система уравнений с частными производными (1.76), линейные уравнения (1.73), (1.74) в окрестности точки $(x, y) \in D$ имеют решения нужного нам вида, то возможность приведения уравнения (1.61) в окрестности точки к каноническим видам (1.64), (1.65), (1.67) доказана.

Пример 113. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{1.77}$$

Это уравнение гиперболического типа, т.к.

$$b^2 - ac = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Согласно общей теории, находим $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ из уравнений

$$\xi_x + (1 - \sin x)\xi_y = 0, \;\; \eta_x - (1 + \sin x)\eta_y = 0.$$

Нетрудно проверить, что решениями этих уравнений являются функции

$$\xi(x, y) = x - y + \cos x, \;\; \eta(x, y) = x + y - \cos x.$$

Таким образом вводим новые переменные (ξ, η) по формулам

$$\xi = x - y + \cos x, \;\;\; \eta = x + y - \cos x.$$

Тогда уравнение (1.77) в новых независимых переменных приводится к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{1.78}$$

Положив $\alpha = \xi + \eta,\ \beta = \xi - \eta$, приведем уравнение (1.78) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} = 0.$$

1.2.6. Задача Коши для линейного уравнения второго порядка гиперболического типа

Задача Коши для линейного уравнения с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными x и y

$$\begin{gathered} a\,(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\,(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\,(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + d\,(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + e\,(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y} + g\,(x,y)\,u = f\,(x,y)\,, \end{gathered} \tag{1.79}$$

где a, b, c, d, e, g, f — известные в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ гладкие действительные функции, причем функции a, b, c одновременно в нуль не обращаются и в D выполняется $b^2 - ac > 0$, с условиями

$$u|_\Gamma = \varphi\,(x,y)\,,\ \left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_\Gamma = \psi\,(x,y)\,, \tag{1.80}$$

состоит в следующем. Пусть в области D задано уравнение (1.79) гиперболического типа и на кривой Γ, которая принадлежит области D или является частью границы области D, заданы функции $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ и направление $\boldsymbol{l}(x,y)$. Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая в области D является решением уравнения (1.79) и на кривой Γ удовлетворяет условиям (1.80).

Если в каждой точке кривой Γ направление $\boldsymbol{l}$ не является касательным к кривой Γ и касательное направление к кривой Γ не является характеристическим, то в области D, ограниченной характеристиками, проходящими через концы кривой Γ, при достаточной гладкости коэффициентов уравнения (1.79) и данных условий (1.80) существует единственное решение задачи Коши (1.79), (1.80).

Рассмотрим два метода решения задачи Коши (1.79), (1.80).

Метод характеристик

Алгоритм решения задачи Коши методом характеристик состоит в том, что уравнение (1.79) приводится сначала, если это возможно, к следующему каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = \Phi. \tag{1.81}$$

Затем последовательным интегрированием по ξ и η, можно найти общее решение уравнения (1.81)

$$v(\xi,\eta) = \mathrm{M}\,(\xi,\eta) + f(\xi) + g(\eta), \quad \mathrm{M}_{\xi\eta} = \Phi, \tag{1.82}$$

а тем самым и найти общее решение уравнения (1.79)

$$u(x,y) = v(\xi(x,y),\eta(x,y)), \tag{1.83}$$

зависящее от двух произвольных гладких функций f и g. Данные функции определяются однозначно, если подставить общее решение (1.83) в условия (1.80).

Если уравнение (1.79) с постоянными коэффициентами и имеет канонический вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} + A\frac{\partial v}{\partial\xi} + B\frac{\partial v}{\partial\eta} + Cv = H, \tag{1.84}$$

где $A, B, C = \mathrm{const}$ такие, что $A^2+B^2+C^2 \neq 0$ и $AB - C = 0$, то его можно упростить, положив $v\,(\xi,\eta) = e^{\lambda\xi+\mu\eta}w\,(\xi,\eta)$. Так как

$$\frac{\partial v}{\partial\xi} = \lambda e^{\lambda\xi+\mu\eta}w\,(\xi,\eta) + e^{\lambda\xi+\mu\eta}\frac{\partial w}{\partial\xi}\,(\xi,\eta)\,,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \mu e^{\lambda\xi+\mu\eta} w(\xi,\eta) + e^{\lambda\xi+\mu\eta}\frac{\partial w}{\partial \eta}(\xi,\eta),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}(\xi,\eta) = \lambda\mu e^{\lambda\xi+\mu\eta} w(\xi,\eta) + \lambda e^{\lambda\xi+\mu\eta}\frac{\partial w}{\partial \eta}(\xi,\eta) +$$

$$+\mu e^{\lambda\xi+\mu\eta}\frac{\partial w}{\partial \xi}(\xi,\eta) + e^{\lambda\xi+\mu\eta}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}(\xi,\eta),$$

то уравнение (1.84), в результате данной замены, примет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi} + (A+\mu)\frac{\partial w}{\partial \xi} + (B+\lambda)\frac{\partial w}{\partial \eta} + \\ + (\lambda\mu + A\lambda + B\mu + C)\, w = H_1, \quad H_1 = He^{-\lambda\xi-\mu\eta}.\end{gathered} \tag{1.85}$$

Выбирая λ и μ так, чтобы $A+\mu=0$, $B+\lambda=0$, т. е. $\mu=-A$, $\lambda=-B$ и учитывая равенство $C=AB$, уравнение (1.85) можно переписать в виде (1.81).

Пример 114. Рассмотрим задачу Коши

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 6u_y = 0, u\,|_{y=0} = 0, u_y\,|_{y=0} = 1.$$

Дискриминант $b^2 - ac$ характеристической формы равен $1 > 0$, т. е. данное уравнение принадлежит гиперболическому типу. Приведем исходное уравнение к каноническому виду. Составим уравнение характеристик

$$\varphi_x^2 - 4\varphi_x\varphi_y + 3\varphi_y^2 = 0.$$

Получаем отсюда уравнения с частными производными первого порядка

$$\varphi_x - \varphi_y = 0,\ \ \varphi_x - 3\varphi_y = 0.$$

Нетрудно проверить, что частными решениями этих уравнений соответственно являются функции

$$\varphi_1(x,y) = x + y,\ \ \varphi_2(x,y) = 3x + y.$$

Введем новые переменные

$$\begin{cases} \xi = 3x + y, \\ \eta = x + y. \end{cases}$$

Обозначим $v(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$. В новых переменных частные производные преобразуются следующим образом:

$$u_x = 3v_\xi + v_\eta, \quad u_y = v_\xi + v_\eta$$

$$u_{xx} = 9v_{\xi\xi} + 6v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta},$$
$$u_{xy} = 3v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + 4v_{\xi\eta}.$$

После подстановки их в исходное уравнение, получим канонический вид

$$v_{\xi\eta} - v_\eta = 0. \tag{1.86}$$

Чтобы упростить уравнение (1.86), введем замену

$$v(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta}\omega(\xi, \eta).$$

С учетом пересчета производных, получим

$$\omega_{\xi\eta} + \mu\omega_\xi + (\lambda - 1)\omega_\eta + (\lambda\mu - \mu)\omega = 0.$$

Полагая $\lambda = 1$, $\mu = 0$, имеем

$$\omega_{\xi\eta} = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right) = 0.$$

Интегрируя по η, получаем что

$$\omega_\xi = \tilde{f}_1(\xi).$$

Интегрируя теперь последнее равенство по переменной ξ, получим

$$\omega(\xi, \eta) = F(\xi) + g(\eta),$$

где $F(\xi)$ такая, что $F'(\xi) = \tilde{f}_1(\xi)$. Тогда общее решение уравнения (1.86) имеет вид

$$v\,(\xi, \eta) = e^{\xi}(F(\xi) + g(\eta)).$$

Переходя к переменным x, y, получим общее решение заданного уравнения

$$u(x, y) = e^{3x+y}(F(3x + y) + g(x + y))$$

или

$$u(x, y) = f(3x + y) + e^{3x+y}g(x + y),$$

где $f(3x+y) = e^{3x+y}F(3x+y)$, f, g — произвольные гладкие действительные функции. Подчиним общее решение начальным условиям

$$u(x, 0) = f(3x) + e^{3x}g(x) = 0,$$

$$u_y(x, 0) = f'(3x) + e^{3x}g(x) + e^{3x}g'(x) = 1.$$

Функции f и g определяются из следующей системы

$$\begin{cases} f(3x) + e^{3x}g(x) = 0, \\ f'(3x) + e^{3x}g(x) + e^{3x}g'(x) = 1. \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение этой системы по переменной x, получим

$$3f'(3x) + 3e^{3x}g(x) + e^{3x}g'(x) = 0.$$

Второе уравнение системы умножим на 3 и вычтем из последнего, в результате будем иметь

$$g'(x) = \frac{3}{2}e^{-3x}.$$

Интегрируя, находим

$$g(x) = -\frac{1}{2}e^{-3x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Из первого уравнения системы найдем теперь

$$f(3x) = -\left(-\frac{1}{2}e^{-3x} + C\right)e^{3x} = \frac{1}{2} - Ce^{3x}$$

или

$$f(s) = \frac{1}{2} - Ce^{s},\ \ s = 3x.$$

Итак, решение задачи Коши имеет вид

$$u(x,y) = \frac{1}{2} - Ce^{y+3x} + e^{y+3x}\left(-\frac{1}{2}e^{-3(x+y)} + C\right)$$

или

$$u(x,y) = \frac{1-e^{-2y}}{2}.$$

Метод факторизации

Данный метод позволяет в некоторых случаях свести линейное уравнение с частными производными второго порядка гиперболического или параболического типов к системе двух линейных уравнений первого порядка. Рассмотрим уравнение (1.79) считая, что коэффициенты этого уравнения постоянны и $a = 1, \quad b^2 - c \geqslant 0$. Представим левую часть уравнения (1.79) в виде композиции двух линейных дифференциальных операторов первого порядка действующих на функцию $u(x,y)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_1\frac{\partial}{\partial y} + \beta_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2\frac{\partial}{\partial y} + \beta_2\right)u(x,y) = f\left(x,y\right). \tag{1.87}$$

При этом, сравнивая уравнения (1.79) и (1.87) мы видим, что коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ должны удовлетворять условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -2b, \\ \alpha_1\alpha_2 = c, \\ \beta_1 + \beta_2 = d, \\ \beta_1\beta_2 = g, \\ \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 = -e. \end{cases} \tag{1.88}$$

При определенных дополнительных условиях на коэффициенты уравнения (1.79) система уравнений (1.88) имеет решение, а именно

$$\begin{gathered} d^2 - 4g \geqslant 0, \\ (b \pm \sqrt{b^2 - c})(d \mp \sqrt{d^2 - 4g}) + \\ +(b \mp \sqrt{b^2 - c})(d \pm \sqrt{d^2 - 4g}) = -2e. \end{gathered} \tag{1.89}$$

Обозначим $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \alpha_2\dfrac{\partial}{\partial y} + \beta_2\right) u(x, y) = v\,(x, y)$. Тогда уравнение (1.87) (и тем самым уравнение (1.79)) сведено к следующей системе линейных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \alpha_2\dfrac{\partial u}{\partial y} + \beta_2 u = v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \alpha_1\dfrac{\partial v}{\partial y} + \beta_1 v = f. \end{cases} \tag{1.90}$$

К уравнению (1.79) добавим следующие начальные условия:

$$u|_{y=y_0(x)} = \varphi(x), \quad u_y|_{y=y_0(x)} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.91}$$

Чтобы выделить единственное решение второго уравнения системы (1.91), необходимо поставить начальное условие для функции $v(x, y)$. Заметим, что из первого уравнения системы

(1.89) следует, что

$$v\,|_{y=y_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\,|_{y=y_0} - \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial y}\,|_{y=y_0} + \beta_2 u\,|_{y=y_0}$$

и, в силу (1.91), имеем

$$v\,|_{y=y_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\,|_{y=y_0} - \alpha_2 \psi(x) + \beta_2 \varphi(x). \tag{1.92}$$

Для того, чтобы найти значение $\dfrac{\partial u}{\partial x}\,|_{y=y_0}$, продифференцируем первое равенство (1.91) по переменной x. Получим, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,|_{y=y_0} + \frac{\partial u}{\partial y}\,|_{y=y_0}\,\frac{dy_0}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}$$

или, с учетом второго равенства (1.91), будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,|_{y=y_0} = \frac{d\varphi}{dx} - \psi(x)\frac{dy_0}{dx}.$$

Подставив это значение в (1.92), в итоге получаем

$$v\,|_{y=y_0} = \frac{d\varphi}{dx} - \psi(x)\frac{dy_0}{dx} - \alpha_2 \psi(x) + \beta_2 \varphi(x). \tag{1.93}$$

Таким образом, задача (1.79), (1.91) сведена к двум задачам Коши для уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} - \alpha_1 \dfrac{\partial v}{\partial y} + \beta_1 v = f, \\ v\,|_{y=y_0} = \dfrac{d\varphi}{dx} - \psi(x)\dfrac{dy_0}{dx} - \alpha_2 \psi(x) + \beta_2 \varphi(x), \end{cases} \tag{1.94}$$

и

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \alpha_2 \dfrac{\partial u}{\partial y} + \beta_2 u = v, \\ u|_{y=y_0(x)} = \varphi(x). \end{cases} \tag{1.95}$$

Решая последовательно задачи (1.94), (1.95) найдем единственное решение задачи Коши (1.79), (1.91).

Пример 115. Рассмотрим задачу Коши

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 6u_y = 0,\ u\,|_{y=0} = 0,\ u_y\,|_{y=0} = 1.$$

Представим заданное уравнение в виде (1.87). Система (1.88) для определения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ в данном случае примет вид

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 4, \\ \alpha_1\alpha_2 = 3, \\ \beta_1 + \beta_2 = -2, \\ \beta_1\beta_2 = 0, \\ \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 = -6. \end{cases} \tag{1.96}$$

Из первого и второго уравнения системы (1.96) находим $\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = 1$ или $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 3$. Из третьего и четвертого уравнения системы (1.96) следует, что $\beta_1 = 0,\ \beta_2 = -2$ или $\beta_1 = -2,\ \beta_2 = 0$. Положим $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 3,\ \beta_1 = -2,\ \beta_2 = 0$. При этом последнее равенство (1.96) выполнено. Тогда, в соответствии с (1.90), данному уравнению сопоставим систему линейных уравнений с частными производными первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} - 2v = 0. \end{cases} \tag{1.97}$$

Пользуясь начальными данными и формулой (1.93), имеем следующую задачу Коши для определения функции v:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 2v, \quad v\,|_{y=0} = -3\,.$$

Из характеристической системы

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{dv}{2v}$$

следует, что

$$\varphi_1 = x + y,\ \ \varphi_2 = e^{2y} v.$$

Поэтому

$$v(x, y) = e^{-2y} f(x + y),$$

где f — произвольная гладкая действительная функция. Используя начальные условия для функции v, получим

$$v\,\big|_{y=0} = f(x) = -3,$$

следовательно,

$$v(x, y) = -3e^{-2y}.$$

Теперь переходим к поиску функции u. Соответствующая задача Коши имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = -3e^{-2y}, \\ u\,\big|_{y=0} = 0. \end{cases}$$

Составим характеристическую систему

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-3} = \frac{dv}{-3e^{-2y}}$$

и найдем первые интегралы

$$\varphi_3 = 3x + y,\ \ \varphi_4 = v + \frac{1}{2}e^{-2y}.$$

Тогда

$$u(x, y) = f_1(3x + y) - \frac{1}{2}e^{-2y},$$

где f_1 — произвольная гладкая действительная функция. Подставляя найденное $u(x, y)$ в соответствующее начальное условие, находим $f_1 = \frac{1}{2}$ и, окончательно имеем

$$u(x, y) = \frac{1 - e^{-2y}}{2}.$$

1.2.7. Задача Коши для линейного уравнения второго порядка с аналитическими данными. Формулировка теоремы Коши–Ковалевской

В этом разделе мы выделим довольно общий класс задач Коши для уравнения с частными производными второго порядка, для которых решение существует и единственно. Рассмотрим следующее уравнение с частными производными второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = F\left(\boldsymbol{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ... \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, ...\right), \;\; i,j = 1, ..., n, \tag{1.98}$$

где $i = j \neq 1$, $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Уравнения вида (1.98) принято называть нормальными уравнениями или уравнениями Коши-Ковалевской.

Например, волновое уравнение, уравнение Лапласа и уравнение теплопроводности нормальны относительно каждой переменной x_i, $i = 1, ..., n$; волновое уравнение, кроме того, нормально относительно t.

Если функция F линейна относительно u и всех производных от u входящих в F, то уравнение (1.98) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i=j\neq 1}}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x}) u + f(\boldsymbol{x}). \tag{1.99}$$

Пусть в некоторой области D_0 пространства переменных $x_2, ..., x_n$ заданы функции

$$\varphi_0(x_2, \ldots, x_n), \;\; \varphi_1(x_2, \ldots, x_n).$$

Задача отыскания в некоторой окрестности области D_0 решения u уравнения (1.98), удовлетворяющего начальным условиям

$$\frac{\partial^i u}{\partial x_1^i}\Big|_{x_1=x_{1_0}} = \varphi_i(x_2, \dots, x_n),\ i = 0, 1, \tag{1.100}$$

называется задачей Коши.

Определение 114. *Функция $f(z_1, ..., z_m)$ называется аналитической в окрестности точки $(z_{1_0}, ..., z_{m_0})$, если она разлагается в степенной ряд*

$$f(z_1, ..., z_m) = \sum_{k_1 \geqslant 0, ..., k_m \geqslant 0} a_{k_1 \dots k_m} (z_1 - z_{1_0})^{k_1} \dots (z_m - z_{m_0})^{k_m},$$

сходящийся при достаточно малых $|z_i - z_{i_0}|$, $i = 1, ..., m$. При этом функция $f(z_1, ..., z_m)$ имеет в точке $(z_{1_0}, ..., z_{m_0})$ производные всех порядков и

$$a_{k_1 \dots k_m} = \frac{1}{k_1! \dots k_m!} \left(\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_m} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m}} \right) \Big|_{\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_0},$$

где $\boldsymbol{z} = (z_1, ..., z_m)$, $\boldsymbol{z}_0 = (z_{1_0}, ..., z_{m_0})$.

Имеет место следующее важное утверждение, известное под названием теоремы Коши–Ковалевской.

Теорема 17. *Пусть функции φ_i, $i = 0, 1$ являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки $(x_{2_0}, ..., x_{n_0})$ и F аналитична в некоторой окрестности точки $\Big(x_{1_0}, ..., x_{n_0},\ \varphi_0(x_{2_0}, ..., x_{n_0}),\ \varphi_1(x_{2_0}, ..., x_{n_0}),\ \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial x_2}(x_{2_0}, ..., x_{n_0}), ..., \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial x_n}(x_{2_0}, ..., x_{n_0}), \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(x_{2_0}, ..., x_{n_0}), ..., \dfrac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_n^2}(x_{2_0}, ..., x_{n_0})\Big)$, то задача Коши (1.98), (1.100) имеет аналитическое решение в некоторой окрестности точки $(x_{1_0}, ..., x_{n_0})$ и при этом единственное в классе аналитических функций.*

Приведем идею доказательства. Решение u в окрестности точки $(x_{1_0}, ..., x_{n_0})$ ищется в виде степенного ряда

$$u(x_1, ..., x_n) = \sum_{k_1 \geqslant 0, ..., k_n \geqslant 0} \frac{1}{k_1!...k_n!} \cdot \frac{\partial^{k_1+...+k_n} u(x_{1_0}, ..., x_{n_0})}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}} \cdot$$
$$\cdot (x_1 - x_{1_0})^{k_1} \cdot ... \cdot (x_n - x_{n_0})^{k_n}, \; k_1 + ... + k_n \leqslant 2, k_1 \leqslant 1. \tag{1.101}$$

Из начальных условий (1.100) и из уравнений (1.98) последовательно определяются все производные $\dfrac{\partial^{k_1+...+k_n} u}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}$ в точке $(x_{1_0}, ..., x_{n_0})$. Доказывается равномерная сходимость рядов (1.101) в некоторой окрестности точки $(x_{1_0}, ..., x_{n_0})$. Единственность построенного решения в классе аналитических функций следует из теоремы единственности для аналитических функций.

Замечание 14. Из теоремы 1.7 следует, что если данные задачи Коши (1.99), (1.100) a_{ij}, b_i, $i, j = 1, ..., n$, c, f — аналитические функции в некоторой окрестности точки $(x_{1_0}, ..., x_{n_0})$ а, φ_0, φ_1 — аналитические функции в некоторой окрестности точки $(x_{2_0}, ..., x_{n_0})$, то в некоторой окрестности точки $(x_{1_0}, ..., x_{n_0})$ задача Коши (1.99), (1.100) имеет единственное аналитическое решение.

Замечание 15. Теорема Коши–Ковалевской, несмотря на ее общий характер, полностью не решает вопроса корректности постановки задачи Коши для нормального дифференциального уравнения. Действительно, эта теорема гарантирует существование и единственность решения лишь в достаточно малой окрестности, или, как говорят, в малом; обычно же эти факты требуется установить в наперед заданных (и отнюдь не малых) областях, или, как говорят, в целом. Более того, начальные данные и свободный член уравнения, как правило, оказываются неаналитическими функциями.

1.2.8. Понятие корректности задачи математической физики. Пример Адамара

Так как задачи математической физики представляют собой математические модели реальных физических процессов, то их постановки должны удовлетворять следующим естественным требованиям.

а) Решение должно существовать в каком-либо классе функций M_1.

б) Решение должно быть единственным в каком-либо классе функций M_2.

в) Решение должно непрерывно зависеть от данных задачи (начальных и граничных данных, свободного члена, коэффициентов уравнения и т. д.).

Непрерывная зависимость решения u от данных задачи Z означает следующее: пусть последовательность данных Z_k, $k = 1, 2, ...$, в каком-то смысле стремится к Z при $k \to \infty$, и u_k, $k = 1, 2, ...$, — соответствующие решения задачи; тогда должно быть $u_k \to u$ при $k \to \infty$ в смысле надлежащим образом выбранной сходимости. Требование непрерывной зависимости решения обусловливается тем обстоятельством, что физические данные, как правило, определяются из эксперимента приближению, и поэтому нужно быть уверенным в том, что решение задачи в рамках выбранной математической модели не будет существенно зависеть от погрешностей измерений.

Задача, удовлетворяющая перечисленным требованиям, называется корректно поставленной задачей математической физики (по Адамару), а множество функций $M_1 \bigcap M_2$ называется классом корректности. Задача, не удовлетворяющая хотя бы одному из условий а)-в), называется некорректно поставленной.

Приведем пример, показывающий, что может вовсе не быть непрерывной зависимости решения от начальных данных. Этот пример построен Адамаром.

Пример 116. Решение задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ \ u|_{t=0} = 0,\ \ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{1}{k}\sin kx$$

есть $u_k(x,t) = \dfrac{\operatorname{sh} kt}{k^2}\sin kx$. Если $k \to \infty$, то $\dfrac{1}{k}\sin kx \to 0$; тем не менее при $x \neq j\pi$, $j = 0, \pm 1, \ldots$ $u_k(x,t)$ не стремится к нулю при $k \to \infty$. Таким образом, задача Коши для уравнения Лапласа поставлена некорректно.

1.3. Вывод основных уравнений математической физики

Математическое описание многих физических процессов приводит к дифференциальным и интегральным уравнениям. Весьма широкий класс физических процессов описывается линейными дифференциальными уравнениями второго порядка. В этом разделе мы рассмотрим характерные физические процессы, сводящиеся к различным краевым задачам для дифференциальных уравнений.

1.3.1. Уравнение колебаний струны

Многие задачи механики (колебания струн, стержней, мембран и трехмерных объемов) и физики (электромагнитные колебания) описываются уравнением колебаний вида (1.9). Продемонстрируем вывод уравнения (1.9) на примере малых поперечных колебаний струны и мембраны.

Рассмотрим натянутую струну, закрепленную на концах. Под струной понимают тонкую нить, которая может свободно изгибаться, т. е. не оказывает сопротивления изменению её формы, не связанному с изменением её длины.

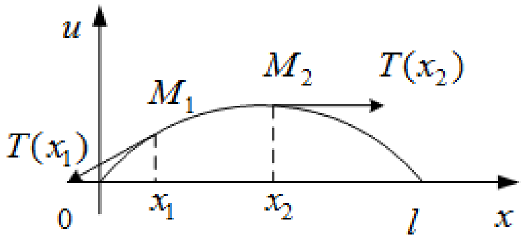

Рис. 1.

Сила натяжения T_0, действующая на струну, предполагается значительной, так что можно пренебречь действием силы тяжести.

Пусть в положении равновесия струна направлена по оси Ox.

Будем рассматривать только поперечные колебания струны, предполагая, что движение происходит в одной плоскости и что все точки струны движутся перпендикулярно оси Ox.

Обозначим через $u\,(x,t)$ смещение точек струны в момент времени t от положения равновесия. При каждом фиксированном значении t график функции $u\,(x,t)$, очевидно, дает форму струны в этот момент времени (см. рис.1). Рассматривая далее только малые колебания струны, будем считать, что смещение $u\,(x,t)$, а также производная $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ столь малы, что их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению с этими величинами.

Выделим произвольный участок (x_1,x_2) струны (см. рис.1), который при колебании струны деформируется в участок M_1M_2. Длина дуги этого участка в момент времени t равна

$$S'=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+u_x^2}dx\approx x_2-x_1=S,\;\; u_x=\frac{\partial u}{\partial x},$$

вследствие чего можно считать, что в процессе малых колебаний удлинение участков струны не происходит. Отсюда в силу закона Гука следует, что величина натяжения T в каждой точке струны не меняется со временем. Таким образом, при наших предположениях изменением величины натяжения струны, возникающим при её движении, можно пренебречь по сравнению с натяжением, которому она была уже подвергнута в положении равновесия. Покажем, что величину натяжения T можно считать не зависящей от x, т. е. $T \approx T_0$. Действительно, на участок M_1M_2 струны действуют силы натяжения, направленные по касательным к струне в точках M_1 и M_2, внешние силы и силы инерции. Сумма проекций на ось Ox всех этих сил должна равняться нулю. Так как мы рассматриваем только поперечные колебания, то силы инерции и внешние силы направлены параллельно оси Ou, тогда

$$-T(x_1)\cos\alpha(x_1) + T(x_2)\cos\alpha(x_2) = 0,$$

где $\alpha(x)$ — угол между касательной в точке с абсциссой x к струне в момент времени t с положительным направлением оси x. В силу малости колебаний

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx 1,$$

и, следовательно,

$$T(x_1) \approx T(x_2).$$

Отсюда ввиду произвольности x_1 и x_2 следует, что величина натяжения T не зависит от x. Таким образом, можно считать, что $T \approx T_0$ для всех значений x и t.

Перейдем к выводу уравнений колебания струны. Для этого воспользуемся принципом Даламбера, на основании которого все силы, действующие на некоторый выделенный участок в струне, включая силы инерции, должны уравновешиваться.

Рассмотрим произвольный участок M_1M_2 струны и составим условие равенства нулю суммы проекций на ось Ou всех сил, действующих на него: сил натяжения, равных по величине и направленных по касательным к струне в точках M_1 и M_2, внешней силы, направленной параллельно оси Ou, и силы инерции.

Сумма проекций на ось Ou сил натяжения, действующих в точках M_1 и M_2, равняется

$$Y = T_0 \left[\sin\alpha\left(x_2\right) - \sin\alpha\left(x_1\right)\right],$$

но вследствие наших предположений

$$\sin\alpha\left(x\right) = \frac{tg\alpha\left(x\right)}{\sqrt{1 + tg^2\alpha\left(x\right)}} = \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x},$$

и, следовательно,

$$Y = T_0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=x_1}\right].$$

Замечая теперь, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=x_1} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx,$$

окончательно получим

$$Y = T_0 \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \tag{1.102}$$

Обозначим через $p\left(x, t\right)$ внешнюю силу, действующую на струну параллельно оси Ou и рассчитанную на единицу длины. Тогда проекция на ось Ou внешней силы, действующий на участок $M_1 M_2$ струны, будет равна

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} p\left(x, t\right) dx \tag{1.103}$$

Пусть $\rho(x)$ — линейная плотность струны, тогда сила инерции участка M_1M_2 струны будет равна

$$-\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \qquad (1.104)$$

Сумма проекций (1.102)-(1.104) на ось Ou всех сил, действующих на участок M_1M_2 струны должна быть равна нулю, т. е.

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x,t) \right] dx = 0.$$

Отсюда ввиду произвольности x_1 и x_2 следует при предположении гладкости подынтегральной функции, что подынтегральная функция должна равняться нулю для каждой точки струны в любой момент времени t, т. е.

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t) \qquad (1.105)$$

Это есть искомое уравнение колебаний струны.

Если $\rho = const$, т. е. в случае однородной струны, уравнение (1.105) обычно записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad (1.106)$$

где

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad f(x,t) = \frac{p(x,t)}{\rho}. \qquad (1.107)$$

Если внешняя сила отсутствует, то $p(x,t) = 0$ и получаем уравнение свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (1.108)$$

Уравнение (1.105) имеет бесчисленное множество частных решений. Поэтому одного уравнения (1.105) недостаточно для полного определения движения струны. Нужны ещё некоторые дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи. Так, в начальный момент времени $t = 0$ нужно задать положение и скорость всех точек струны

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0\left(x\right), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1\left(x\right). \tag{1.109}$$

Условия (1.109) называются начальными условиями.

Далее, так как струна ограничена, то нужно указать, что происходит на её концах. Для закрепленной струны на концах должно быть

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 \tag{1.110}$$

при всяком $t \geqslant 0$. Условия (1.110) называются краевыми или граничными условиями. Возможны и другие граничные условия.

Итак, физическая задача о колебании струны свелась к математической задаче: найти решение уравнения (1.105), которое удовлетворяло бы начальным условиям (1.109) и граничным условиям (1.110).

Можно рассматривать колебания полубесконечной или бесконечной струны, когда один или оба конца находятся бесконечно далеко. Оба эти случая являются идеализацией случая очень длинной струны, причем первый из них соответствует рассмотрению точек, сравнительно близких от одного из концов струны, а второй — рассмотрению точек, расположенных далеко от обоих концов. В первом из этих случаев в качестве граничного условия остаётся требование $u\big|_{x=0} = 0$, а во втором случае граничные условия вообще отсутствуют. Начальные функции $\varphi_0\left(x\right)$ и $\varphi_1\left(x\right)$ должны быть в этих случаях заданы соответственно для всех $0 \leqslant x < \infty$ или для всех $-\infty < x < \infty$.

1.3.2. Уравнение колебаний мембраны

Мембраной называют свободно изгибающуюся натянутую плёнку.

Пусть в положении равновесия мембрана расположена в плоскости xOy и занимает некоторую область D, ограниченную замкнутой кривой L. Далее предположим, что мембрана находится под действием равномерного натяжения T, приложенного к краям мембраны. Это означает, что если провести линию по мембране в любом направлении, то сила взаимодействия между двумя частями, разделенными элементами линии, пропорциональна длине элемента и перпендикулярна его направлению. Величина силы, действующая на элемент dS линии, будет равна TdS.

Будем рассматривать только поперечные колебания мембраны, при которых каждая её точка движется перпендикулярно плоскости xOy, параллельно оси Ou. Тогда смещение u точки (x, y) мембраны будет функцией от x, y и t.

Рассматривая далее только малые колебания мембраны, будем считать, что функция $u(x, y, t)$, а также её частные производные по x и y малы, так что квадратами и произведениями их можно принебречь по сравнению с самими этими величинами.

Выделим произвольный участок σ мембраны, ограниченный в положении равновесия кривой l. Когда мембрана будет выведена из положения равновесия, этот участок мембраны деформируется в участок σ' поверхности мембраны, ограниченный пространственной кривой l'.

Площадь участка σ' в момент времени t равна

$$\sigma' = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}dxdy \approx \iint\limits_{\sigma} dxdy = \sigma.$$

Таким образом, при наших предположениях можно пренебречь изменением площади произвольно взятого участка мембраны в процессе колебаний и считать, что любой участок σ' мембраны будет находится под действием первоначального натяжения T.

Перейдём к выбору уравнения поперечных колебаний мембраны. Рассмотрим произвольный участок σ' мембраны. Со стороны остальной части мембраны на этот участок действует направленное по нормали к контуру l равномерно распределённое натяжение T, лежащее в касательной плоскости к поверхности мембраны. Найдем проекцию на ось Ou сил натяжения, приложенных к кривой l', ограничивающей участок σ' мембраны. Обозначим через dS' элемент дуги кривой l'. На этот элемент действует натяжение, равное по величине TdS'. Косинус угла, образованного вектором натяжения T с осью Ou, очевидно, равен, в силу наших предположений $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$, где $\boldsymbol{n}$ — направление внешней нормали к кривой l, ограничивающей участок σ мембраны в положении равновесия (см. рис. 2).

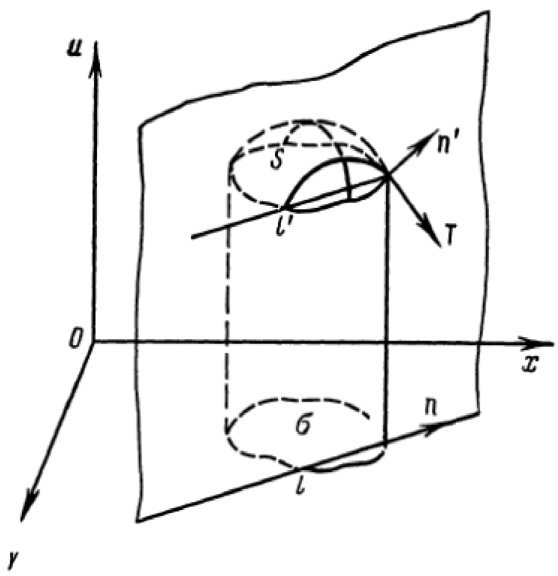

Рис. 2.

Отсюда следует, что проекция на ось Ou сил натяжения, приложенных к элементу dS' контура l', равна

$$T\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}dS'$$

и, стало быть, проекция на ось Ou натяжения, приложенных ко всему контуру l', равна

$$T\int\limits_{l'}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}dS'. \tag{1.111}$$

Т.к. при малых колебаниях мембраны можно считать $dS \approx dS'$, то мы можем в интеграле (1.111) путь интегрирования l' заменить на l. Тогда применяя формулу Грина, получим

$$T\int\limits_{l}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,dS = T\iint\limits_{\sigma}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy. \tag{1.112}$$

Предположим далее, что на мембрану параллельно оси Ou действует внешняя сила $p(x, y, t)$, рассчитанная на единицу площади. Тогда проекция на ось Ou внешней силы, действующей на участок σ' мембраны, будет равна

$$\iint\limits_{\sigma} p(x, y, t)\,dxdy. \tag{1.113}$$

Силы (1.112) и (1.113) должны в любой момент времени t уравновешиваться силами инерции участка σ' мембраны

$$-\iint\limits_{\sigma}\rho(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dxdy,$$

где $\rho(x, y)$ — поверхностная плотность мембраны.

Таким образом, мы получаем равенство

$$\iint\limits_{\sigma}\left[\rho(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + p(x, y, t)\right]\,dxdy = 0.$$

Отсюда в силу произвольности площадки σ следует, что

$$\rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + p(x,y,t). \tag{1.114}$$

Это есть дифференциальное уравнение поперечных колебаний мембраны. В случае однородной мембраны $\rho = const$ уравнения малых колебаний мембраны можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t), \tag{1.115}$$

где

$$c = \sqrt{\frac{T}{p}},\ f(x,y,t) = \frac{p(x,y,t)}{\rho}. \tag{1.116}$$

Если внешняя сила отсутствует, т. е. $p(x,y,t) = 0$, то из (1.115) получаем уравнение свободных колебаний однородной мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{1.117}$$

Как и при рассмотрении колебаний струны, одного уравнения (1.114) недостаточно для полного определения движения мембраны. Нужно задать смещение и скорость её точек в начальный момент времени

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x,y), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x,y). \tag{1.118}$$

Далее, так как на контуре l мембрана закреплена, то должно быть

$$u|_L = 0 \tag{1.119}$$

при любом $t \geqslant 0$.

В заключение отметим, что аналогично выводу уравнений колебаний струны и мембраны выводится трехмерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \tag{1.120}$$

которое описывает процессы распространения звука в однородной среде и электромагнитных волн в однородной непроводящей среде. Этому уравнению удовлетворяют плотность газа, его давление и потенциал скоростей, а также составляющие напряженности электрического и магнитного полей и соответствующие потенциалы.

1.3.3. Уравнение распространения тепла в изотропном твердом теле

Процессы распространения тепла или диффузии частиц в среде описываются общим уравнением теплопроводности (1.10). Выведем уравнение распространения тепла (1.10) в случае трех пространственных переменных.

Рассмотрим твёрдое тело, температура которого в точке (x, y, z) в момент времени t определяется функцией $u(x, y, z, t)$. Если различные части тела находятся при различной температуре, то в теле будет происходить движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым. Возьмём какую-нибудь поверхность S внутри тела и на ней малый элемент ΔS. В теории теплопроводности принимается, что количество тепла ΔQ, проходящего через элемент ΔS за время Δt, пропорционально $\Delta t \Delta S$ и нормальной производной $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$, т. е.

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \Delta S \Delta t = -k \Delta S \Delta t \nabla_{\boldsymbol{n}} u, \tag{1.121}$$

где $k > 0$ — коэффициент внутренней теплопроводности, а $\boldsymbol{n}$ — нормаль к элементу поверхности ΔS в направлении движения тепла. Будем считать, что тело изотропно в отношенние теплопроводности, т. е. что коэффициент внутренней теплопроводности k зависит только от точки (x, y, z) тела и не зависит от направления нормали поверхности S в этой точке.

Обозначим, через q тепловой поток, т. е. количество тепла, проходящего через единицу площади поверхности за единицу времени. Тогда (1.121) можно записать в виде

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}. \tag{1.122}$$

Для вывода уравнения распространения тепла выделим внутри тела произвольный объём V, ограниченный гладкой замкнутой поверхностью S, и рассмотрим изменение количества тепла в этом объёме за промежуток времени (t_1, t_2). Нетрудно видеть, что через поверхность S за промежуток времени (t_1, t_2), согласно формуле (1.121), входит количество тепла, равное

$$Q_1 = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_S k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dS,$$

где $\boldsymbol{n}$ — внутренняя нормаль к поверхности S. Рассмотрим элемент объёма ΔV. На изменение температуры этого объёма на Δu за промежуток времени Δt нужно затратить количество тепла

$$\Delta Q_2 = [u(x, y, z, t + \Delta t) - u(x, y, z, t)]\gamma(x, y, z)\Delta V,$$

где $\rho(x, y, z), \gamma(x, y, z)$ — плотность и теплоёмкость вещества. Таким образом, количество тепла, необходимое для изменения температуры объёма V на $\Delta u = u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)$, равно

$$Q_2 = \iiint\limits_V [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]\gamma\rho dV$$

или

$$Q_2 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V \gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV,$$

т.к.

$$u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Предположим, что внутри рассматриваемого тела имеются источники тепла. Обозначим через $F(x,y,z,t)$ плотность (количество поглощаемого или выделяемого тепла в единицу времени в единице объёма тела) тепловых источников. Тогда количество тепла, выделяемого в объёме V за промежуток времени (t_1, t_2), будет равно

$$Q_3 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V F(x,y,z,t) dV.$$

Составим теперь уравнения баланса тепла для выделенного объёма V. Очевидно, что $Q_2 = Q_1 + Q_3$, т. е.

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V \gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_S k \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dS +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V F(x,y,z,t) dV,$$

или, применив формулу Остроградского ко второму интегралу, получим

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V \left[\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k\nabla u) - F(x,y,z,t)\right] dV = 0.$$

Так как подынтегральная функция непрерывна, а объём V и промежуток времени (t_1, t_2) произвольны, то для любой точки (x, y, z) рассматриваемого тела и для любого момента времени t должно быть

$$\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k\nabla u) + F(x, y, z, t) \tag{1.123}$$

или

$$\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k\nabla u) + F(x, y, z, t)\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) + F(x, y, z, t). \tag{1.124}$$

Это уравнение называется уравнением теплопроводности неоднородного изотропного тела.

Если тело однородно, то γ, ρ и k — постоянные и уравнение (1.124) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t), \tag{1.125}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{k}{\gamma\rho}}, \quad f(x, y, z, t) = \frac{F(x, y, z, t)}{\gamma\rho}.$$

Если в рассматриваемом однородном теле нет источников тепла, т. е. $F(x, y, z, t) = 0$, то получим однородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{1.126}$$

В частном случае, когда температура зависит только от координат x, y и t, что например, имеет место при распространении тепла в очень тонкой однородной пластине, уравнение

(1.126) переходит в следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \tag{1.127}$$

Наконец, для тела линейного размера, например, для тонкого однородного стержня, уравнение теплопроводности примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.128}$$

Отметим, что при такой форме уравнений (1.127) и (1.128) не учитывается, конечно, тепловой обмен между поверхностью пластинки или стержня с окружающим пространством.

Чтобы найти температуру внутри тела в любой момент времени, недостаточно одного уравнения (1.124). Необходимо, как это следует из физических соображений, знать ещё распределение температуры внутри тела в начальный момент времени (начальное условие) и тепловой режим на границе S тела (граничное условие).

Граничное условие может быть задано различными способами:

1) в каждой точке поверхности S задается температура

$$u\big|_S = \psi_1(\boldsymbol{P}, t), \tag{1.129}$$

где $\psi_1(\boldsymbol{P}, t)$ — известная функция точки поверхности S и времени t;

2) на поверхности S задается тепловой поток

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}},$$

откуда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_S = \psi_2(\boldsymbol{P}, t), \tag{1.130}$$

где $\psi_2(\boldsymbol{P}, t)$ — известная функция, выражающаяся через заданный тепловой поток по формуле

$$\psi_2(\boldsymbol{P}, t) = -\frac{q(\boldsymbol{P}, t)}{k};$$

3) на поверхности твердого тела происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой u_0 известна. Закон теплообмена очень сложен, но для упрощения задачи он может быть принят в виде закона Ньютона. По закону Ньютона, количество тепла, передаваемое в единицу времени с единицы площади поверхности тела в окружающую среду, пропорционально разности температур поверхности тела и окружающей среды:

$$q = H(u - u_0),$$

где H — коэффициент теплообмена. Коэффициент теплообмена зависит от разности температур $u - u_0$, от характера поверхности и окружающей среды (он может изменяться вдоль поверхности тела). Мы будем считать коэффициент теплообмена H постоянным, не зависящим от температуры и одинаковым для всей поверхности тела.

По закону сохранения энергии, это количество тепла должно быть равно тому количеству тепла, которое передается через единицу площади поверхности за единицу времени вследствие внутренней теплопроводности. Это приводит к следующему граничному условию:

$$H(u - u_0) = -k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \text{ на S},$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S, или, положив $h = \dfrac{H}{k}$,

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + h(u - u_0)\right]\bigg|_S = 0. \tag{1.131}$$

Таким образом, задача о распространении тепла в изотропном твердом теле ставится так: найти решение уравнения теплопроводности (1.124), удовлетворяющее начальному условию

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \tag{1.132}$$

и одному из граничных условий (1.129), (1.130) или (1.131).

1.3.4. Уравнения, описывающие стационарные процессы распространения тепла

Для стационарных процессов (процессов не зависящих от времени) в уравнениях колебаний (1.9) и теплопроводности (1.10) принимается, что $f = f(\boldsymbol{x})$ и $u = u(\boldsymbol{x})$ и эти уравнения принимают вид

$$\Delta u = -h(\boldsymbol{x}),\ \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{1.133}$$

При $h(\boldsymbol{x}) = 0$ уравнение (1.133) называется уравнением Лапласа:

$$\Delta u = 0. \tag{1.134}$$

Для полного описания стационарного процесса необходимо еще задать режим на границе — одно из граничных условий (1.129)–(1.131).

1.4. Вопросы и задачи

1. Проведите классификацию уравнений

а)$u_t = u_{xx} + 2u_x + u$,

б) $u_t = u_{xx} + e^{-t}$,

в) $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = \cos x$,

г) $u_{tt} = uu_{xxx} + 2u_x + \sin x$

по следующим признакам:

1) линейность, квазилинейность, нелинейность;

2) порядок;

3) вид коэффициентов (постоянные, переменные);
4) однородность (для линейных уравнений);
5) тип (для линейных уравнений).

2. Сколько существует решений уравнения $u_t = u_{xx}$? Найдите частные решения этого уравнения вида $u = e^{ax+bt}$.

3. Найдите все функции, которые являются решениями уравнения $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0$.

4. Если функции $u_1 = u_1(x,t)$ и $u_2 = u_2(x,t)$ удовлетворяют уравнению (1.41), то удовлетворяет ли этому уравнению их сумма?

5. Какой факт линейной алгебры лежит в основе классификации уравнений?

6. Выясните, какому типу принадлежат следующие уравнения:
а) $u_{xx} - u_{xy} = 0$,
б) $u_{tt} = u_{xx} + u_x + 5u$,
в) $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$,
г) $u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = f(r,\varphi)$.

7. В чем особенность классификации нелинейных уравнений?

8. Найдите характеристики уравнения $u_{xx} + 4u_{xy} = 0$.

9. Можно ли в общем случае привести линейное уравнение второго порядка к каноническому виду в некоторой области?

10. Приведите уравнение

$$3u_{xx} + 7u_{xy} + 2u_{yy} = 0$$

к каноническому виду в каждой из областей, где сохраняется его тип.

11. Охарактеризуйте уравнение $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = 0$ по признакам, сформулированным в задаче 1. Найдите все решения этого уравнения.

12. Поставьте начальные условия для уравнения

$$u_{tt} + u_{xt} - 2u_{xx} = 0$$

таким образом, чтобы единственным решением полученной задачи Коши являлась функция $u(x,t) = 2t - x$.

13. Верно ли, что если нехарактеристическая задача Коши для линейного уравнения второго порядка имеет некоторое аналитическое решение, то других аналитических решений у этой задачи нет?

14. Какие физические законы лежат в основе моделирования физических процессов распространения волн и тепла?

15. Предположим, что теплоизолированный тонкий однородный стержень длины $l = 1$, боковая поверхность которого теплоизолирована, имеет начальную температуру $\sin(3\pi x)$, а слева и справа на концах поддерживаются соответственно фиксированные температуры 0^0C и 10^0C. Как сформулировать смешанную задачу для уравнения теплопроводности в этом случае?

2. Уравнения гиперболического типа

2.1. Однородное волновое уравнение

2.1.1. Задача Коши для одномерного волнового уравнения. Формула Даламбера

Изучение методов построения решений задач для уравнений гиперболического типа мы начинаем с задачи Коши для уравнения свободных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x). \tag{2.2}$$

Преобразуем уравнение (2.1) к каноническому виду, содержащему смешанную производную. Уравнение характеристик

$$\varphi_t^2 - a^2\varphi_x^2 = 0$$

распадается на два уравнения

$$\varphi_t - a\varphi_x = 0,\ \varphi_t + a\varphi_x = 0,$$

частными решениями которых являются соответственно функции

$$\varphi_1(x,t) = x - at,\ \varphi_2(x,t) = x + at.$$

Теперь полагая

$$\xi = x + at,\ \eta = x - at,$$

уравнение (2.1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{2.3}$$

Общее решение уравнения (2.3) дается формулой

$$u = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ — произвольные гладкие функции. Возвращаясь к переменным x, t получаем

$$u = f_1(x+at) + f_2(x-at). \tag{2.4}$$

Полученное решение зависит от двух произвольных функций f_1 и f_2. Оно называется решением Даламбера.

Далее, подставляя (2.4) в (2.2), будем иметь

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \tag{2.5}$$

$$af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x), \tag{2.6}$$

откуда, интегрируя равенство (2.6), получим

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(y)dy + C, \tag{2.7}$$

где x_0 и C — действительные постоянные. Из формул (2.5) и (2.7) находим

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) + \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(y)dy + C\right],$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) - \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(y)dy - C\right].$$

При этом, учитывая (2.4), имеем

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\varphi(x+at) + \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x+at} \psi(y)dy + C +$$

$$+\varphi(x-at) - \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x-at} \psi(y)dy - C\Big],$$

и окончательно получаем формулу

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy. \tag{2.8}$$

Формула (2.8) называется формулой Даламбера.

Нетрудно проверить, что формула (2.8) удовлетворяет уравнению (2.1) и начальным условиям (2.2) при условии, что $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$, а $\psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$. Таким образом, изложенный метод доказывает существование решения поставленной задачи.

Покажем, что решение задачи (2.1)-(2.2) непрерывно зависит от начальных данных (устойчиво). А именно: каков бы ни был промежуток времени $[0, t_0]$ и какова бы ни была степень точности ε, найдется такое $\delta(\varepsilon, t_0)$, что всякие два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ уравнения (2.1) в течение промежутка времени $[0, t_0]$ будут различаться между собой меньше чем на ε:

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon,\ 0 \leqslant t \leqslant t_0,$$

если только начальные значения

$$\begin{cases} u_1(x,0) = \varphi_1(x), \\ \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi_1(x) \end{cases} \text{и} \quad \begin{cases} u_2(x,0) = \varphi_2(x), \\ \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi_2(x) \end{cases}$$

отличаются друг от друга меньше чем на δ:

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta,\ |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta. \tag{2.9}$$

Действительно, функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ связаны со своими начальными данными формулой (2.8), поэтому имеем

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}|\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)| +$$

$$+\frac{1}{2}|\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)| + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} |\psi_1(y) - \psi_2(y)|dy.$$

Откуда, в силу неравенств (2.9) получаем:

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a}\delta \cdot 2at \leqslant \delta(1+t_0),$$

что и доказывает наше утверждение, если положить

$$\delta < \frac{\varepsilon}{1+t_0}.$$

2.1.2. Задача с начальными условиями для волнового уравнения с тремя пространственными переменными. Формула Кирхгофа

Рассмотрим волновое уравнение с тремя пространственными переменными при отсутствии внешних возмущений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \ x \in \mathbb{R}^3, \ t > 0, \tag{2.10}$$

где $\Delta = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)$.

Замечание 21. Вместо уравнения (2.10), не ограничивая общности, далее будем рассматривать уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \ x \in \mathbb{R}^3, \ t > 0, \tag{2.11}$$

т. е. возьмем $a = 1$, т.к. уравнение (2.11) сводится к (2.10) заменой at на t.

Характеристическая квадратичная форма для уравнения (2.11) имеет канонический вид

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_4^2,$$

и, следовательно, это уравнение во всем пространстве $\mathbb{R}^4$ является гиперболическим.

Покажем, что функция

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \iint\limits_S \frac{\mu(y_1, y_2, y_3)}{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|} dS_{\boldsymbol{y}}, \tag{2.12}$$

где $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|$ — расстояние между точками $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ и $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$, $S=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3: |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2=t^2\}$ — сфера с центром в точке $\boldsymbol{x}$ радиуса t, а μ — заданная произвольная действительная дважды непрерывно дифференцируемая функция, является решением уравнения (2.11).

В самом деле, в результате замены переменных $y_i-x_i=t\xi_i, i=1,2,3$, формула (2.12) принимает вид

$$u(\boldsymbol{x},t)=t\iint\limits_{\sigma}\mu(x_1+t\xi_1,x_2+t\xi_2,x_3+t\xi_3)\,d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}, \tag{2.13}$$

где $\sigma=\{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^3: |\boldsymbol{\xi}|=1\}$ — единичная сфера, а $d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}=\dfrac{dS_{\boldsymbol{y}}}{t^2}=\dfrac{dS_{\boldsymbol{y}}}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}$ — элемент ее площади. Из (2.13) имеем

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=t\iint\limits_{\sigma}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\mu}{\partial y_i^2}d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}. \tag{2.14}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\iint\limits_{\sigma}\mu(x_1+t\xi_1,x_2+t\xi_2,x_3+t\xi_3)d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}+$$

$$+t\iint\limits_{\sigma}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\mu}{\partial y_i}\xi_i d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}=\frac{u}{t}+\frac{1}{t}I, \tag{2.15}$$

где

$$I=\iint\limits_{S}\left[\frac{\partial\mu}{\partial y_1}\nu_1+\frac{\partial\mu}{\partial y_2}\nu_2+\frac{\partial\mu}{\partial y_3}\nu_3\right]dS_{\boldsymbol{y}}, \tag{2.16}$$

а $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ — внешняя нормаль к S в точке $\boldsymbol{y}$. Дифференцируя равенство (2.15) по t, находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{u}{t^2}+\frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{t^2}I+\frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t}=-\frac{u}{t^2}+\frac{1}{t}\left(\frac{u}{t}+\frac{I}{t}\right)-\frac{I}{t^2}+$$

$$+\frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t}=\frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{2.17}$$

Из курса математического анализа известно, что для действительных функций $A_i(\boldsymbol{y}), i=1,\ldots,n$, непрерывных вместе со своими производными первого порядка в замкнутой области $D\cup S$ с гладкой границей S, имеет место формула Гаусса-Остроградского

$$\iiint\limits_D \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_i}{\partial y_i}d\tau_{\boldsymbol{y}}=\iint\limits_S \sum_{i=1}^{n}A_i(\boldsymbol{y})\nu_i(\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}, \tag{2.18}$$

где $d\tau_{\boldsymbol{x}}$ — элемент объёма, а $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ — внешняя нормаль к S в точке $\boldsymbol{y}\in S$.

Правая часть (2.16) по формуле (2.18) преобразуется в интеграл по шару $\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3:\ |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2<t^2\}$

$$I=\iiint\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2<t^2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\mu}{\partial y_i^2}d\tau_{\boldsymbol{y}}=\iiint\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2<t^2}\Delta\mu d\tau_{\boldsymbol{y}}, \tag{2.19}$$

где $d\tau_{\boldsymbol{y}}$ — элемент объема по переменному интегрирования $\boldsymbol{y}$, $d\tau_{\boldsymbol{y}}=dy_1dy_2dy_3$.

Переходя от декартовых координат y_1,y_2,y_3 к сферическим ρ,θ,φ, выражение (2.19) для I запишем в виде

$$I=\iiint\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2<t^2}\Delta\mu(\boldsymbol{y})d\tau_{\boldsymbol{y}}=\iiint\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2<t^2}\Delta\mu(\boldsymbol{y})dy_1dy_2dy_3=$$

$$=\left[\begin{array}{c} y_1=x_1+\rho cos\varphi sin\theta\\ y_2=x_2+\rho sin\varphi sin\theta\\ y_3=x_3+\rho cos\theta\end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\Delta\mu(\rho,\theta,\varphi)\rho^2 sin\theta d\varphi d\theta d\rho,$$

где $\rho^2 sin\theta d\varphi d\theta d\rho = d\tau_{\boldsymbol{y}} = dy_1 dy_2 dy_3$. Отсюда, т.к. $sin\theta d\theta d\varphi = d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$, находим

$$\frac{\partial I}{\partial t} = t^2 \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Delta\mu(t,\theta,\varphi) sin\theta d\varphi d\theta = t^2 \iint\limits_{\sigma} \Delta\mu d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} =$$

$$= t^2 \iint\limits_{\sigma} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2} d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Следовательно, в силу (2.17) можно написать

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = t \iint\limits_{\sigma} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2} d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = t \iint\limits_{\sigma} \Delta\mu d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \tag{2.20}$$

На основании (2.14) и (2.20) заключаем, что представленная формулой (2.12) функция $u(\boldsymbol{x},t)$ является решением уравнения (2.11).

Итак, мы доказали, что при требовании существования непрерывных производных второго порядка у функции $\mu(x_1,x_2,x_3)$ заданной в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных x_1,x_2,x_3, функция

$$u(x_1,x_2,x_3,t) = tM(\mu),$$

где

$$M(\mu) = \iint\limits_{\sigma} \mu(x_1 + t\xi_1, x_2 + t\xi_2, x_3 + t\xi_3) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}, \tag{2.21}$$

представляет собой регулярное решение волнового уравнения с тремя пространственными переменными.

Заметим, что т.к. $d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = \dfrac{1}{t^2} dS_{\boldsymbol{y}}$, то выражение

$$\frac{1}{4\pi} M(\mu) = \frac{1}{4\pi t^2} \iint\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2 = t^2} \mu(y_1,y_2,y_3) dS_{\boldsymbol{y}} \tag{2.22}$$

является интегральным средним функции μ по сфере S.

Наряду с $tM(\mu)$ регулярным решением уравнения (2.11) является и функция $\dfrac{\partial}{\partial t}[tM(\mu)]$, если только μ имеет непрерывные производные третьего порядка.

Легко видеть, что функция

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi} tM(\psi) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)] \tag{2.23}$$

является регулярным решением задачи Коши для волнового уравнения (2.11) с начальными условиями

$$u(x_1, x_2, x_3, 0) = \varphi(x_1, x_2, x_3), \tag{2.24}$$

$$\left.\frac{\partial u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x_1, x_2, x_3), \tag{2.25}$$

где $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ и $\psi(x_1, x_2, x_3)$ — заданные в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных x_1, x_2, x_3 действительные функции, имеющие непрерывные частные производные третьего и второго порядка соответственно.

Действительно, как уже было отмечено выше, каждое слагаемое в правой части (2.23) является регулярным решением уравнения (2.11). При $t = 0$ на основании (2.21) из (2.23) имеем

$$u(x_1, x_2, x_3, 0) = \frac{1}{4\pi} M(\varphi)\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\sigma} \varphi(x_1, x_2, x_3)\, d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = \varphi(x_1, x_2, x_3).$$

Далее, так как

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}[tM(\psi)] + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[tM(\varphi)] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}[tM(\psi)] + \frac{1}{4\pi} t\Delta M(\varphi),$$

то

$$\left.\frac{\partial u(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\sigma}\psi(x_1,x_2,x_3)d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}=\psi(x_1,x_2,x_3).$$

Равенство (2.23), дающее решение задачи Коши (2.24), (2.25) для волнового уравнения (2.11) в случае трех пространственных переменных x_1, x_2, x_3 называется формулой Кирхгофа.

Физическое явление, описываемое решением $u(\boldsymbol{x}, t)$ волнового уравнения, называется распространением волны, а само решение $u(\boldsymbol{x}, t)$ — волной.

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)]=M(\varphi)+t\frac{\partial}{\partial t}M(\varphi)=M(\varphi)+t\iint\limits_{\sigma}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\xi_i d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}=$$

$$=M(\varphi)+\frac{1}{t}\iint\limits_{S}\nabla\varphi\cdot\frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}}{t}dS_{\boldsymbol{y}}=M(\varphi)+\frac{1}{t}\iint\limits_{S}\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{\nu}dS_{\boldsymbol{y}}=$$

$$=M(\varphi)+\frac{1}{t}\iint\limits_{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\nu}}dS_{\boldsymbol{y}},$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — внешняя нормаль к S в точке $\boldsymbol{y}$, из формулы Кирхгофа следует, что соответствующая задаче Коши (2.11), (2.24), (2.25) волна в случае трех пространственных переменных в точке $(\boldsymbol{x}, t) = (x_1, x_2, x_3, t)$ пространства $\mathbb{R}^4$ вполне определяется значениями φ, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\nu}}$ и ψ на сфере S. Этот факт в теории звука называется принципом Гюйгенса.

Покажем, что решение задачи Коши (2.11), (2.24), (2.25) непрерывно зависит от начальных данных. Для этого вместо функций φ и ψ в (2.23) возьмем другие φ_0 и ψ_0, такие, что

$$|\varphi-\varphi_0|<\delta,\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_i}\right|<\delta,\ |\psi-\psi_0|<\delta,\ i=1,2,3.$$

Тогда $\forall\ t \in [0, t_0]$

$$|u - u_0| \leqslant \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{\sigma} |\psi - \psi_0| d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\sigma} |\varphi - \varphi_0| d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} +$$

$$+ \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{\sigma} \Big[\Big| \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_1} \Big| |\xi_1| + \Big| \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_2} \Big| |\xi_2| +$$

$$+ \Big| \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_3} \Big| |\xi_3| \Big] d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \leqslant t\delta + \delta + t \cdot 3\delta \leqslant \delta(1 + 4t_0) < \varepsilon,$$

$$\text{если } \delta < \frac{\varepsilon}{1 + 4t_0}.$$

Из последней формулы следует, что решение задачи Коши (2.11), (2.24), (2.25) непрерывным образом зависит от начальных данных на любом конечном временном интервале.

2.1.3. Задача Коши для волнового уравнения с двумя пространственными переменными. Метод спуска. Формула Пуассона

Решение $u(x_1, x_2, t)$ задачи Коши для волнового уравнения с двумя пространственными переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \tag{2.26}$$

когда начальные данные

$$u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2), \tag{2.27}$$

$$\left. \frac{\partial u\,(x_1, x_2, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi\,(x_1, x_2) \tag{2.28}$$

имеют непрерывные частные производные третьего и второго порядка соответственно, может быть получено из формулы Кирхгофа (2.23) методом спуска.

Сущность этого метода заключается в том, что когда в правой части формулы (2.23) функции φ и ψ зависят только от двух переменных x_1, x_2, то эта формула дает функцию

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{|\boldsymbol{y}|^2=t^2}\psi(x_1+y_1,x_2+y_2)\,dS_{\boldsymbol{y}}+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\iint\limits_{|\boldsymbol{y}|^2=t^2}\varphi(x_1+y_1,x_2+y_2)\,dS_{\boldsymbol{y}}\right], \tag{2.29}$$

не зависящую от x_3, и удовлетворяющую как уравнению (2.26), так и условиям (2.27) и (2.28).

Как известно, проекция dy_1dy_2 элемента площади $dS_{\boldsymbol{y}}$ сферы $\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3:\ |\boldsymbol{y}|^2=t^2\}$ на круг $\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2:\ |\boldsymbol{y}|^2<t^2\}$ выражается через $dS_{\boldsymbol{y}}$ формулой $dy_1dy_2=dS_{\boldsymbol{y}}\cos(\widehat{\boldsymbol{i}_3,\boldsymbol{\nu}})=\dfrac{y_3}{t}dS_{\boldsymbol{y}}$, где $\boldsymbol{i}_3$ — орт оси x_3, а $\boldsymbol{\nu}$ — нормаль сферы $\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3:\ |\boldsymbol{y}|^2=t^2\}$ в точке $\boldsymbol{y}$. Поэтому, учитывая то обстоятельство, что при вычислении интегралов в правой части формулы (2.23) следует спроектировать на круг $\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2:\ |\boldsymbol{y}|^2<t^2\}$ как верхнюю $y_3>0$, так и нижнюю $y_3<0$ половины сферы $\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3:\ |\boldsymbol{y}|^2=t^2\}$ формула (2.29) запишется в виде

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{d}\frac{\psi(y_1,y_2)\,dy_1dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{d}\frac{\varphi(y_1,y_2)\,dy_1dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}, \tag{2.30}$$

где $d=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2:\ |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2<t^2\}$.

Равенство (2.30) носит название формулы Пуассона. Из этой формулы видно, что для определения волны $u(x_1,x_2,t)$ в точке (x_1,x_2,t) недостаточно знания значений $\varphi(x_1,x_2)$ и $\psi(x_1,x_2)$ на окружности $\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2:\ |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2=t^2\}$. В определении $u(x_1,x_2,t)$ в точке (x_1,x_2,t) участвуют значения начальных данных $\varphi(x_1, x_2)$ и $\psi(x_1, x_2)$ во всех точках круга d. А это означает, что в случае двух пространственных переменных x_1, x_2 в волновых процессах принцип Гюйгенса не имеет места.

2.1.4. Анализ решения (понятие области зависимости, области влияния и области определения)

В рассмотренной в предыдущих пунктах задаче Коши для волнового уравнения носителем начальных данных является все пространство $\mathbb{R}^n$ переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$.

Множество точек пространства $\mathbb{R}^n$, по заданным значениям функций $\varphi(\boldsymbol{x})$ и $\psi(\boldsymbol{x})$, на котором вполне определяется значение решения $u(\boldsymbol{x}, t)$ волнового уравнения в точке $(\boldsymbol{x}, t)$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, называется областью зависимости для точки $(\boldsymbol{x}, t)$. К области зависимости, разумеется, не относятся точки, в которых значения $\varphi(\boldsymbol{x})$ и $\psi(\boldsymbol{x})$ не участвуют в определении $u(\boldsymbol{x}, t)$ в точке $(\boldsymbol{x}, t)$ (см. Рис.1).

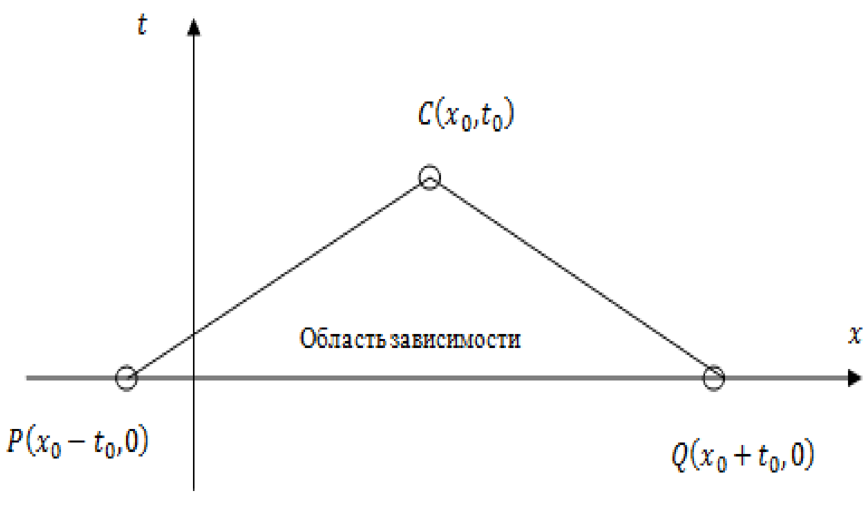

Рис. 1. Область зависимости ($n = 1$).

В зависимости от того $n = 2$ или $n = 1$, областью зависимости для точки $(\boldsymbol{x}, t)$ является круг $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 : \ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2 \leqslant t^2\}$ или отрезок $\{y \in R : \ |x-y| \leqslant t\}$, а при $n=3$ область зависимости определяется по принципу Гюйгенса.

Пусть теперь носителем начальных данных является не все пространство $\mathbb{R}^n$, а некоторая его область G, т. е.

$$u(\boldsymbol{x},0)=\varphi(\boldsymbol{x}), \quad \left.\frac{\partial u(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in G. \tag{2.31}$$

Как видно из формул (2.8), (2.23), (2.30), значения $\varphi(\boldsymbol{x})$ и $\psi(\boldsymbol{x})$ на G влияют на значения $u(\boldsymbol{x},t)$ во всех точках $(\boldsymbol{x},t)$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, которые обладают тем свойством, что пересечение двух множеств G и $\left\{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2<t^2\right\}$ не является пустым. Множество всех таких точек принято называть областью влияния (см. Рис. 2).

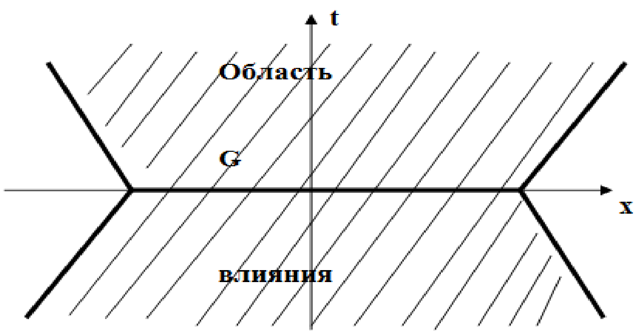

Рис. 2. Область влияния ($n=1$).

Множество точек $(\boldsymbol{x},t)\in R^{n+1}$, в которых значения $u(\boldsymbol{x},t)$ вполне определяются по заданным значениям $\varphi(\boldsymbol{x})$ и $\psi(\boldsymbol{x})$ на G, называется областью определения или областью распространения волны $u(\boldsymbol{x},t)$ с начальными данными на G (см. Рис.3).

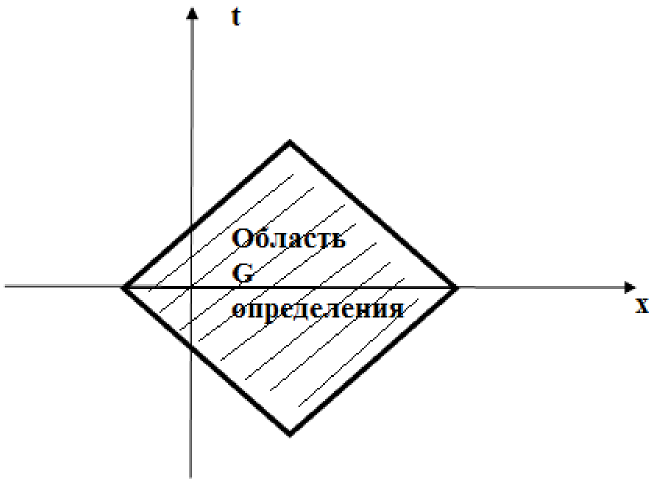

Рис. 3. Область определения ($n = 1$).

Из формул (2.8), (2.23), (2.30) следует, что при начальных данных (2.31) область определения волны $u\,(\boldsymbol{x}, t)$ составляют исключительно те точки $(\boldsymbol{x}, t)$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, которые обладают свойством:

1) при $n = 3$ сфера $\{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2 = t^2\}$, являющаяся пересечением характеристического конуса $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2 = (\tau - t)^2$ с вершиной в точке $(\boldsymbol{x}, t)$ с гиперплоскостью $\tau = 0$, принадлежит G;

2) при $n = 2$ не только окружность $\{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2 = t^2\}$, являющаяся пересечением характеристического конуса $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2 = (\tau - t)^2$ с вершиной в точке $(\boldsymbol{x}, t)$ с плоскостью $\tau = 0$, но весь круг $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2 \leqslant t^2$ принадлежит G;

3) при $n = 1$ не только точки $x - t$ и $x + t$ пересечения характеристических прямых $y - x = \tau - t$, $y - x = t - \tau$ (вырожденного характеристического конуса $|y - x|^2 = (\tau - t)^2$), проходящих через точку (x, t), с прямой $\tau = 0$, но и весь прямолинейный отрезок между этими точками принадлежит G.

2.2. Неоднородное волновое уравнение

2.2.1. Случай одной пространственной переменной

Рассмотрим теперь задачу Коши для неоднородного уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{2.32}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{2.33}$$

Легко проверить, что решение задачи (2.32)-(2.33) представимо в форме

$$u = v + w, \tag{2.34}$$

где v — решение задачи Коши (2.1)-(2.2), а w — решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \\ w(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial w(x,0)}{\partial t} = 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.35}$$

Пусть $W(x,t;\tau)$ — решение вспомогательной задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2},\ x \in \mathbb{R},\ t > \tau, \\ \\ W(x,t;\tau)\,|_{t=\tau} = 0,\ \dfrac{\partial W(x,t;\tau)}{\partial t}\,|_{t=\tau} = f(x,\tau). \end{cases} \tag{2.36}$$

Покажем, что решение $w(x,t)$ задачи (2.35) определяется формулой

$$w(x,t) = \int\limits_0^t W(x,t;\tau)d\tau, \tag{2.37}$$

где $W(x,t;\tau)$ — решение задачи (2.36). Действительно

$$w(x,0) = 0,\ \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = W(x,t;\tau) + \int\limits_0^t \frac{\partial W(x,t;\tau)}{\partial t} d\tau$$

и, следовательно, $\dfrac{\partial w(x,0)}{\partial t} = 0$ в силу начального условия в (2.36). И, наконец,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial W(x,t;\tau)}{\partial t}\Big|_{t=\tau} + \int\limits_0^t \Big(\frac{\partial^2 W(x,t;\tau)}{\partial t^2} -$$

$$-a^2 \frac{\partial^2 W(x,t;\tau)}{\partial x^2}\Big) d\tau = f(x,t).$$

Решение задачи (2.36) дается формулой Даламбера

$$W(x,t;\tau) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi. \tag{2.38}$$

Теперь, используя формулы (2.8), (2.34), (2.37) и (2.38), находим, что решение исходной задачи (2.32)-(2.33) задается формулой

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau) d\xi d\tau. \tag{2.39}$$

2.2.2. Случай трех пространственных переменных. Запаздывающий потенциал

За носителя начальных данных вместо плоскости $t = 0$ примем плоскость $t = \tau_1$, где τ_1 — некоторый параметр, и обозначим через $v(x_1, x_2, x_3, t, \tau_1)$ решение волнового уравнения (2.11), удовлетворяющее начальным условиям

$$v(x_1, x_2, x_3, t, \tau_1)|_{t=\tau_1} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t} v(x_1, x_2, x_3, t, \tau_1)\Big|_{t=\tau_1} = g(x_1, x_2, x_3, \tau_1), \tag{2.40}$$

где $g(x_1, x_2, x_3, \tau_1)$ — заданная действительная функция, имеющая непрерывные частные производные второго порядка.

Заменой t через $t - \tau$ из формулы Кирхгофа (2.23) для v получаем выражение

$$v(x_1, x_2, x_3, t, \tau_1) = \frac{1}{4\pi(t-\tau_1)} \iint\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2=(t-\tau_1)^2} g(y_1, y_2, y_3, \tau_1) dS_{\boldsymbol{y}},$$
$$\varphi = 0, \ \psi = g(\boldsymbol{y}, \tau_1).$$

Покажем,что функция

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \int\limits_0^t v(x_1, x_2, x_3, t, \tau_1) d\tau_1 \tag{2.41}$$

является решением задачи Коши

$$u(x_1, x_2, x_3, 0) = 0, \ \frac{\partial}{\partial t} u(x_1, x_2, x_3, t)\Big|_{t=0} = 0 \tag{2.42}$$

для неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + g(x_1, x_2, x_3, t),$$
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \tag{2.43}$$

В самом деле, в силу (2.40) сразу видно, что функция $u(x_1, x_2, x_3, t)$ удовлетворяет начальным условиям (2.42). Далее, на основании (2.40) из (2.41) получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g(x_1, x_2, x_3, t) + \int\limits_0^t \frac{\partial^2 v(x_1, x_2, x_3, t, \tau_1)}{\partial t^2} d\tau_1. \tag{2.44}$$

Из (2.41) и (2.44) имеем

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\Delta u=-g(x_1,x_2,x_3,t)+\int\limits_0^t\Big(\Delta-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)v(x_1,x_2,x_3,t,\tau_1)d\tau_1$$

$$=-g(x_1,x_2,x_3,t),$$

что и доказывает справедливость нашего утверждения.

В результате замены переменного $t-\tau_1=\tau$ формула (2.41) запишется в виде

$$u(\boldsymbol{x},t)=\int\limits_0^t\frac{1}{4\pi(t-\tau_1)}\iint\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2=(t-\tau_1)^2}g(y_1,y_2,y_3,\tau_1)dS_{\boldsymbol{y}}d\tau_1=$$

$$=\int\limits_0^t\frac{1}{4\pi\tau}\iint\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2=\tau^2}g(y_1,y_2,y_3,t-\tau)dS_{\boldsymbol{y}}d\tau=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t\iint\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2=\tau^2}g(y_1,y_2,y_3,t-\tau)\frac{dS_{\boldsymbol{y}}}{\tau}d\tau= \qquad (2.45)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2<\tau^2}\frac{g(y_1,y_2,y_3,t-|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|)}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}d\tau_{\boldsymbol{y}}.$$

Определённая по формуле (2.45) функция $u(\boldsymbol{x},t)$, дающая решение задачи (2.42)-(2.43), совпадает с потенциалом объемных масс, распределённых по шару $\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3:\ |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2<t^2\}$ с плотностью $g(y_1,y_2,y_3,t-|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|)$. Ввиду того, что функция g участвует в формуле (2.45) для значения времени $t-|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|$, отстающего от момента наблюдения за волной, этот потенциал называется запаздывающим.

2.2.3. Случай двух пространственных переменных

Приведённая выше процедура построения решения задачи Коши для уравнения (2.43) применима и в случае двух пространственных переменных. Так как функция

$$v(x_1, x_2, \tau, t) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_d \frac{g(y_1, y_2, \tau) dy_1 dy_2}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}$$

в силу (2.30) является решением уравнения (2.26), удовлетворяющим условиям

$$v(x_1, x_2, t, \tau) = 0, \ \frac{\partial}{\partial t} v(x_1, x_2, t, \tau)\Big|_{t=\tau} = g(x_1, x_2, \tau),$$

то выражение

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t \iint\limits_d \frac{g(y_1, y_2, \tau) dy_1 dy_2}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} d\tau, \tag{2.46}$$

где $d = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 : \ |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| < (t-\tau)^2\}$, представляет собой решение задачи Коши

$$u(x_1, x_2, 0) = 0, \ \frac{\partial}{\partial t} u(x_1, x_2, t)\Big|_{t=0} = 0$$

для неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + g(x_1, x_2, t). \tag{2.47}$$

В уравнении (2.47) и, следовательно, в формуле (2.46) предполагается, что функция $g(x_1, x_2, t)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка.

2.3. Корректно поставленные задачи для гиперболических уравнений

2.3.1. Единственность решения задачи Коши

Докажем, что задача Коши в приведённой выше постановке для волнового уравнения (как однородного, так и неоднородного) не может иметь более одного решения. Для простоты ограничимся случаем одного пространственного измерения x. Если $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ являются решениями задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t), \tag{2.48}$$

то их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ будет решением уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.49}$$

удовлетворяющим начальным условиям

$$u(x,0) = 0, \ \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\Big|_{t=0} = 0. \tag{2.50}$$

Итак, нам следует показать, что однородное уравнение (2.49) не может иметь отличного от нуля решения, удовлетворяющего однородным начальным условиям (2.50). Интегрируя тождество

$$-2\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = -2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = 0$$

по треугольной области Δ с вершинами в точках $A(x-t,0)$, $B(x+t,0)$ и $C(x,t)$ и используя формулу Гаусса-Остроградского, получаем

$$\int\limits_{\Delta} \Big[-2\frac{\partial}{\partial \xi}\Big(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \tau}\Big) + \frac{\partial}{\partial \tau}\Big(\frac{\partial u}{\partial \xi}\Big)^2 + \frac{\partial}{\partial \tau}\Big(\frac{\partial u}{\partial \tau}\Big)^2\Big] d\xi d\tau =$$

$$= \int\limits_{AB+BC+CA} -2\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau - \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial \xi}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial \tau}\Big)^2\Big] d\xi = 0. \tag{2.51}$$

Вдоль AB в силу (2.50) имеют место равенства $\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = 0$ и $\dfrac{\partial u}{\partial \tau} = 0$. Кроме того, т.к. уравнения прямолинейных отрезков BC, CA имеют вид $\xi = -\tau + x + t$, $\xi = \tau + x - t$, то вдоль этих отрезков имеем соответственно $d\xi = -d\tau$, $d\xi = d\tau$. Поэтому равенство (2.43) можно переписать в виде

$$\int\limits_{BC} \Big(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau}\Big)^2 d\tau - \int\limits_{CA} \Big(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\Big)^2 d\tau = 0$$

или

$$\int\limits_0^t \Big(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau}\Big)^2 d\tau + \int\limits_0^t \big(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\big)^2 d\tau = 0,$$

откуда следует, что $\dfrac{\partial u}{\partial \xi} - \dfrac{\partial u}{\partial \tau} = 0$ на BC и $\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial \tau} = 0$ на AC. Следовательно в вершине $C(x,t)$ треугольника Δ имеют место равенства $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$, т. е. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$. Т.к. точка $C(x,t)$ выбрана произвольно, то равенства $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ имеют место всюду на плоскости переменных x, t. Это означает, что $u(x,t) = \mathrm{const}$. Но в силу (2.50) функция $u(x,0) = 0$, откуда следует, что $u(x,t) = 0$ всюду.

2.3.2. Общая постановка задачи Коши

До сих пор мы считаем, что носителем начальных данных является плоскость $t = 0$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $x_1, .., x_n, t$. Сейчас, на примере уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.52}$$

покажем, каким условиям должен удовлетворять носитель L начальных данных, отличный от $t = 0$, и какой вид должны иметь сами начальные данные для того, чтобы полученная в итоге задача была поставлена корректно.

Обозначим через D область плоскости переменных x, t с кусочно-гладкой границей S. Пусть $u(x,t)$ — регулярное в области D решение уравнения (2.52), имеющее непрерывные частные производные в $D \cup S$.

Интегрируя тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 \tag{2.53}$$

по области D и используя формулу Гаусса-Остроградского, получаем

$$\int\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] dxdt = \int\limits_S \frac{\partial u}{\partial x}dt + \frac{\partial u}{\partial t}dx = 0. \tag{2.54}$$

Пусть L — разомкнутая кривая с непрерывной кривизной, удовлетворяющая двум требованиям: а) каждая прямая из двух семейств $x + t = \mathrm{const}$, $x - t = \mathrm{const}$ характеристик уравнения (2.52) пересекается с кривой L не более чем в одной её точке и б) направление касательной к кривой ни в одной точке не совпадает с характеристическим направлением, соответствующим уравнению (2.52).

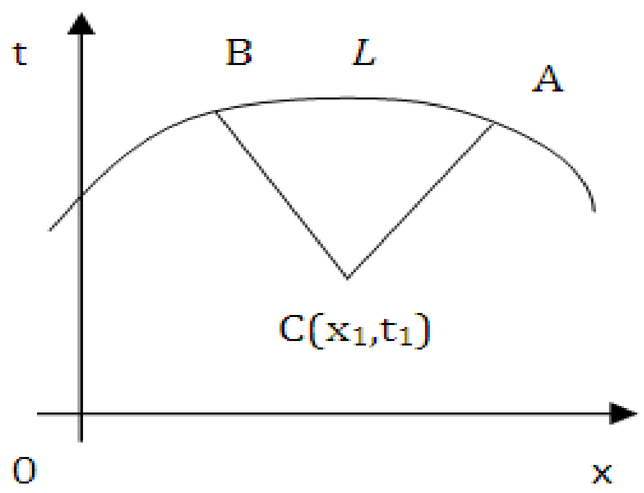

Рис 4.

Предположим, что характеристики $x - x_1 = t - t_1$, $x - x_1 = t_1 - t$, выходящие из точки $C(x_1, t_1)$ пересекаются с кривой L в точках A и B. Применяя формулу (2.54) в области, ограниченной дугой AB и кривой L и отрезками характеристик CA и CB, получаем

$$\int\limits_{AB+BC+CA} \frac{\partial u}{\partial x}dt + \frac{\partial u}{\partial t}dx = 0. \tag{2.55}$$

Так как вдоль CA и BC имеем $dx = dt$, $dx = -dt$ соответственно, то (2.55) можно записать в виде

$$\int\limits_{AB} \frac{\partial u}{\partial x}dt + \frac{\partial u}{\partial t}dx - 2u(C) + u(A) + u(B) = 0,$$

откуда находим

$$u(C) = \frac{1}{2}u(A) + \frac{1}{2}u(B) + \frac{1}{2}\int\limits_{AB} \frac{\partial u}{\partial x}dt + \frac{\partial u}{\partial t}dx. \tag{2.56}$$

Если решение $u(x,t)$ уравнения (2.52) удовлетворяет условиям

$$u|_L = \varphi, \ \left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_L = \psi, \tag{2.57}$$

где φ и ψ — заданные действительные соответственно дважды и один раз непрерывно дифференцируемые функции, а $\boldsymbol{l}$ — заданный на L достаточно гладкий вектор, нигде не совпадающий с касательной к кривой L, то, определяя $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ из равенств $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{d\varphi}{ds}$, $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial s} = \psi$, где S — длина дуги L, и подставляя известные значения u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ в правую часть (2.50), получим регулярное решение уравнения (2.52), удовлетворяющее условиям (2.57).

Задача отыскания регулярного решения уравнения (2.52), удовлетворяющего условиям (2.57), также называется задачей Коши. Из приведённого выше рассуждения следует, что задача Коши в только что указанной постановке имеет единственное устойчивое решение.

2.3.3. Задача Гурса (характеристическая задача)

Пусть теперь L представляет собой совокупность отрезков OA и OB характеристик $x - t = 0$, $x + t = 0$ соответственно. Характеристики $x - x_1 = t - t_1$, и $x - x_1 = t_1 - t$, выходящие из точки $C(x_1, t_1)$ пересекаются с OA и OB в точках $A_1\left(\dfrac{x_1 + t_1}{2}, \dfrac{x_1 + t_1}{2}\right)$ и $B_1\left(\dfrac{x_1 - t_1}{2}, -\dfrac{x_1 - t_1}{2}\right)$ соответственно.

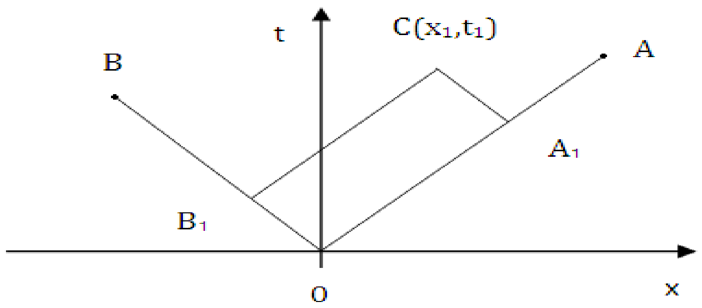

Рис. 5.

Применяя формулу (2.54), в случае характеристического прямоугольника OA, CB_1, получаем

$$\int\limits_{OA_1+A_1C+CB_1+B_1O} \frac{\partial u}{\partial x}dt + \frac{\partial u}{\partial t}dx = 0$$

или

$$\int\limits_{OA_1} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial t}dt - \int\limits_{A_1C} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial t}dt + \int\limits_{CB_1} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial t}dt -$$

$$-\int\limits_{B_1O} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial t}dt = 2u(A_1) - 2u(O) - 2u(C) + 2u(B_1) = 0,$$
откуда имеем
$$u(C) = u(A_1) + u(B_1) - u(O). \tag{2.58}$$
Если известно, что
$$u\big|_{OA} = \varphi(x_1),\ u\big|_{OB} = \psi(x_1),\ \varphi(0) = \psi(0), \tag{2.59}$$
то из (2.58) получаем
$$u(x,t) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-t}{2}\right) - \varphi(0). \tag{2.60}$$

Из этой формулы следует, что значения u и $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}$ вдоль характеристик независимо друг от друга задавать нельзя.

Задача определения регулярного решения уравнения (2.52) по условиям (2.59) называется задачей Гурса. Единственное устойчивое решение этой задачи даётся формулой (2.60). Поскольку в задаче Гурса носителями данных являются характеристики уравнения (2.52), эта задача называется ещё характеристической задачей.

2.4. Вопросы и задачи

1. Найдите решение задачи Коши для однородного уравнения колебаний струны
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = xe^{-x^2}. \end{cases}$$

2. Пользуясь формулой Даламбера для решения $u(x,t)$ задачи Коши
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

проверьте, что в случае нечетности обеих функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ $u(x,t)|_{x=0} = 0$, а в случае их четности $u_x(x,t)|_{x=0} = 0$.

3. Найдите решение задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний струны

$$u_{tt} = u_{xx} + x(x-1)$$

при нулевых начальных условиях.

4. Может ли описывать функция

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 t^2$$

процесс распространения волны.

5. Сформулируйте основную идею метода спуска.

6. Чем объясняется тот факт, что принцип Гюйгенса не имеет места в плоском случае?

7. Что такое область влияния, зависимости, определения решения задачи Коши для уравнения колебаний струны?

8. Укажите область зависимости точки $A(2;3)$ для решения задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u\,|_{t=0} = -1, \; u_t\,|_{t=0} = 3. \end{cases}$$

9. Что такое запаздывающий потенциал?

10. Корректно ли поставлена задача об отыскании в первой четверти плоскости x, t решения $u(x,t)$ уравнения

$$u_{tt} = u_{xx},$$

если

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leqslant x < \infty,$$
$$u(0,t) = \psi(t),\ 0 \leqslant t < \infty,$$
$$\varphi(0) = \psi(0),\ \varphi''(0) = \psi''(0)?$$

3. Уравнения параболического типа

3.1. Принцип максимума

Простейшим примером уравнений параболического типа является уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3.1}$$

Поскольку дифференциальное уравнение характеристик, соответствующих уравнению (3.1), имеет вид $dt^2 = 0$, то это уравнение имеет единственное семейство характеристик $t = \mathrm{const}$, представляющих собой прямые, параллельные оси x.

Рассмотрим область D плоскости переменных x, t, ограниченную отрезками OA и BN прямых $t = 0, t = T$, где T — положительное число, и кривыми OB и AN, каждая из которых пересекается с прямыми $t = \mathrm{const}$ в одной точке, причем, если уравнения этих кривых заданы соответственно в виде $x = \alpha(t), x = \beta(t)$, то предполагается, что $\alpha(t) < \beta(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

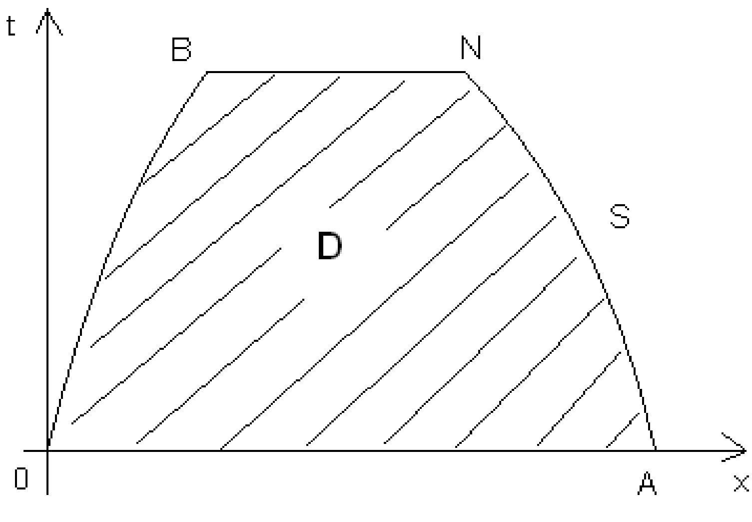

Рис. 6.

Обозначим через S часть границы области D, состоящую из OA, OB и AN, причем считается, что $B \in S$, $N \in S$ (см. Рис. 6).

Функцию $u(x,\, t)$, имеющую на множестве $D \cup BN$ непрерывные частные производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и удовлетворяющую уравнению (3.1) в области D, будем называть регулярным решением этого уравнения.

ТЕОРЕМА 31. *Регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (3.1), непрерывное в $D \cup S \cup BN$, своего экстремума достигает на S.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся рассмотрением случая максимума. Обозначим через M максимум $u(x,\, t)$ на замкнутом множестве $D \cup S \cup BN$. Допустим, что $u(x,\, t)$ достигает максимума M не на S, а в некоторой точке $(x_0, t_0) \in D \cup BN$. Покажем, что это допущение приводит к противоречию.

В самом деле, введем в рассмотрение функцию

$$v(x,t) = u(x,t) + a(T-t), \tag{3.2}$$

где a — положительная постоянная. Ввиду того, что $0 \leqslant t \leqslant T$, из (3.2) имеем

$$u(x,t) \leqslant v(x,t) \leqslant u(x,t) + aT \tag{3.3}$$

всюду в $D \cup S \cup BN$.

Пусть M_u^S, M_v^S – максимумы соответственно $u(x,t)$ и $v(x,t)$ на S. По допущению $M_u^S < M$. Число a подберем так, чтобы имело место неравенство

$$a < \frac{M - M_u^S}{T}. \tag{3.4}$$

На основании (3.3) и (3.4) получаем

$$M_v^S \leqslant M_u^S + aT < M_u^S + \frac{M - M_u^S}{T} T = M = u(x_0,t_0) \leqslant v(x_0,t_0).$$

Отсюда следует, что функция $v(x,t)$ не может достигать максимума на S. Следовательно, эта функция своего максимума на $D \cup S \cup BN$ достигает в некоторой точке $(x_1, t_1) \in D \cup BN$.

Сначала предположим, что $(x_1, t_1) \in D$. Так как (x_1, t_1) является точкой максимума функции $v(x,t)$ на $D \cup S \cup BN$, то в этой точке $\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0$, т. е.

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Пусть теперь $(x_1, t_1) \in BN$. Ввиду того, что $v(x,t)$ достигает в точке (x_1, t_1) своего максимума на множестве $D \cup S \cup BN$, в этой точке $\dfrac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0$. Учитывая то обстоятельство, что (x_1, T) является точкой максимума $v(x,T)$ как функции x, мы должны иметь $\dfrac{\partial^2 v(x_1, T)}{\partial x_1^2} \leqslant 0$. Следовательно, неравенство (3.5) имеет место в точке (x_1, T).

Подставляя в левую часть (3.5) значения $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, найденные из равенства (3.2), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} - a - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \geqslant 0, \quad x = x_1, \quad t = t_1,$$

или, т.к. $u(x,t)$ является решением уравнения (3.1), $-a \geqslant 0$, а это невозможно, ибо $a > 0$.

Полученное противоречие доказывает справедливость первой части теоремы. Аналогично доказывается и вторая ее часть.

3.2. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности

Доказанная теорема позволяет установить единственность и устойчивость решения следующей так называемой первой краевой задачи для уравнения теплопроводности: ищется регулярное в области D решение $u(x,t)$ уравнения (3.1), непрерывное в $D \cup S \cup BN$ и удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered} u|_{OB} = \psi_1(t), \;\; u|_{AN} = \psi_2(t), \;\; u|_{OA} = \varphi(x), \\ \psi_1(0) = \varphi(0), \;\; \psi_2(A) = \varphi(A), \end{gathered} \tag{3.6}$$

где ψ_1, ψ_2 и φ — заданные действительные непрерывные функции.

В самом деле, если $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — регулярные решения уравнения (3.1), удовлетворяющие краевым условиям (3.6), то функция $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ будет регулярным решением уравнения (3.1), обращающимся в нуль на S. Следовательно, в силу теоремы 3.1, $u(x,t) = 0$ в $D \cup S \cup BN$, откуда и следует единственность решения первой краевой задачи (3.1), (3.6).

Если разность между краевыми значениями на S регулярных решений $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ уравнения (3.1) по модулю меньше $\varepsilon > 0$, то в силу теоремы 3.1, $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon$ всюду в $D \cup S \cup BN$, и тем самым непрерывная зависимость решения первой краевой задачи от краевых данных на S (т. е. устойчивость решения этой задачи) доказана.

Теперь мы докажем существование решения первой краевой задачи для уравнения (3.1) в предположениях, что OB и AN — прямолинейные отрезки, соединяющие точки $O(0,0)$, $B(0,T)$ и $A(l,0), N(l,T)$ соответственно, причем

$$u(0,t) = 0, \;\; u(l,t) = 0, \;\; 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.7}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3.8}$$

где $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ функция, обращающаяся в нуль при $x = 0$, $x = l$.

Как известно из курса математического анализа, функцию $\varphi\,(x)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\pi k}{l} x, \tag{3.9}$$

где

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{\pi k}{l} x\, dx,\ k = 1, 2, ...$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что функция

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{x_n^k}{k!} \Delta^k \tau(x_1, ..., x_{n-1}) \tag{3.10}$$

для любой заданной бесконечно дифференцируемой действительной функции τ переменных $x_1, ..., x_{n-1}$ при равномерной сходимости ряда в правой части (3.10) и рядов, полученных из него дифференцированием почленно один раз по x_n и дважды по $x_i,\ i = 1, ...,\ n-1$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Пользуясь формулой (3.10) при $n = 2,\ x_1 = x,\ x_2 = t$, $\tau_k(x) = sin\dfrac{\pi k}{l}x$, получаем регулярное решение уравнения (3.1):

$$u_k(x,t) = e^{-\frac{\pi^2 k^2 t}{l^2}} \sin\frac{\pi k}{l} x, \tag{3.11}$$

удовлетворяющее краевым условиям $u_k(0,t) = u(l,t) = 0$, $u_k(x,0) = sin\dfrac{\pi k}{l}x$.

Очевидно, что функция $u(x,t)$, представляющая сумму ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{\pi^2 k^2 t}{l^2}} \sin\frac{\pi k}{l} x, \tag{3.12}$$

будет искомым решением краевой задачи (3.1), (3.7), (3.8).

При $t > 0$ абсолютная и равномерная сходимость ряда (3.12) и рядов, полученных из него дифференцированием по x и t сколь угодно раз в окрестности точки (x, t), следует из того, что

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\pi k}{l}\right)^m e^{\frac{-\pi^2 k^2}{l^2}t} = 0,\ m = 0, 1, ...$$

Когда носителем данных (3.8) является отрезок прямой $t = t_0$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ в условиях (3.7), то решение первой краевой задачи в прямоугольнике $0 < x < l,\ t_0 < t < T$ дается опять формулой (3.12), в которой вместо t следует писать $t - t_0$.

Заметим, что ряд в правой части этой формулы при $t < 0$ может вовсе не иметь смысла. По этой причине не рассматривается первая краевая задача для уравнения (3.1), когда $t < t_0$, где $t = t_0$ — носитель данных в краевых условиях.

Все сказанное выше, очевидно остается в силе и тогда, когда число пространственных переменных больше единицы, лишь с той разницей, что в последнем случае вместо простых рядов (3.9), (3.12) следует брать кратные ряды.

3.3. Постановка задачи Коши и доказательство существования ее решения

Пусть D представляет собой бесконечную полосу $-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T$, где T — фиксированное положительное число, причем случай $T = \infty$ не исключается (см. Рис 7.)

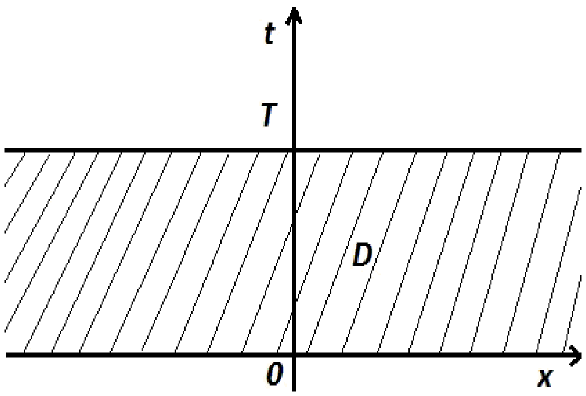

Рис. 7.

Ограниченную, непрерывную в области D функцию $u\left(x,t\right)$ с непрерывными внутри D частными производными $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, удовлетворяющую уравнению (3.1), будем называть регулярным решением этого уравнения.

Под задачей Коши понимается следующая задача: ищется регулярное в полосе D решение $u\left(x,t\right)$ уравнения (3.1), удовлетворяющее условию

$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\ -\infty<x<\infty, \tag{3.13}$$

где $\varphi\left(x\right),\ -\infty<x<\infty,$ — заданная действительная непрерывная ограниченная функция.

Непосредственными вычислением можно убедиться что решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

является функция

$$E\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\right)=\left(x_n-\xi_n\right)^{\frac{1-n}{2}}\exp\left[-\frac{1}{4\left(x_n-\xi_n\right)}\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_i-\xi_i\right)^2\right], \tag{3.14}$$

где $\xi_1,...,\xi_n$ — действительные параметры, причем $x_n>\xi_n$. Представленная формулой (3.14) функция называется элементарным (фундаментальным) решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Таким образом функция

$$E\left(x, \xi, t, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4t}},\ t > 0, \tag{3.15}$$

является решением уравнения (3.1) во всех точках (x, t) полуплоскости $t > 0$.

Докажем, что функция $u\left(x, t\right)$, определенная по формуле

$$u\left(x, t\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\xi\right) e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4t}} d\xi, \tag{3.16}$$

является решением задачи Коши.

Нетрудно проверить, что интеграл в правой части (3.16) сходиться равномерно в окрестности любой внутренней точки (x, t) полосы D.

В результате замены переменного интегрирования $\xi = x + 2\eta\sqrt{t}$ формула (3.16) принимает вид

$$u\left(x, t\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x + 2\eta\sqrt{t}\right) e^{-\eta^2} d\eta. \tag{3.17}$$

Так как $\sup\limits_{-\infty < x < \infty} \left|\varphi\left(x\right)\right| < M$, где M — положительное число, и интеграл в правой части (3.17) сходится абсолютно, то

$$\left|u\left(x, t\right)\right| < \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta,$$

откуда ввиду того, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \sqrt{\pi}, \tag{3.18}$$

имеем
$$|u(x,t)| \leqslant M.$$

Учитывая то обстоятельство, что интегралы, полученные при внесении под знак интеграла в правой части (3.16) операции дифференцирования по x и t (любое число раз), сходятся равномерно вблизи каждой точке (x,t), $t>0$, и функция $E(x,\xi,t,0)$ при $t>0$ удовлетворяет уравнению (3.1), заключаем, что определенная формулой (3.16) функция $u(x,t)$ в полосе D является решением уравнения (3.1).

Предельным переходом при $t\to 0$ (эта операция законна из-за равномерной сходимости интеграла вблизи каждой точки $(x,0)$ при $t\geqslant 0$) из (3.17) в силу (3.18) получаем

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \varphi(x).$$

Единственность и устойчивость решения задачи Коши непосредственно получается из следующего утверждения (принцип экстремума для полосы).

Теорема 32. *Для регулярного в полосе D решения $u(x,t)$ уравнения (3.1) имеют место оценки*

$$\begin{gathered} m \leqslant u(x,t) \leqslant M, \\ m=\inf u(x,0), \; M=\sup u(x,0), \; -\infty<x<\infty. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Для доказательства первого неравенства в (3.19), рассмотрим функцию $v(x,t)=x^2+2t$, являющуюся решением уравнения (3.1).

Обозначим через n нижнюю грань $u(x,t)$ при $(x,t)\in D$ и введем в рассмотрение функцию

$$w(x,t)=u(x,t)-m+\varepsilon\frac{v(x,t)}{v(x_0,t_0)}, \tag{3.20}$$

где ε — произвольное положительное число, $a\,(x_0,t_0)$ — произвольная фиксированная точка внутри полосы D.

Представленная формулой (3.20) функция $w\,(x,t)$ является решением уравнения (3.1), причем при $t=0$

$$w\,(x,0)=u\,(x,0)-m+\varepsilon\frac{x^2}{x_0^2+2t_0^2}\geqslant 0 \qquad (3.21)$$

и при $|x|=|x_0|+\sqrt{\dfrac{(m-n)\,v\,(x_0,t_0)}{\varepsilon}}$

$$w\,(x,t)\geqslant u\,(x,t)-n\geqslant 0. \qquad (3.22)$$

Из оценок (3.21), (3.22) на основании доказанного выше принципа экстремума, примененного в прямоугольнике

$$0\leqslant t\leqslant T,\ -|x_0|-\sqrt{\frac{(m-n)\,v\,(x_0,t_0)}{\varepsilon}}\leqslant x\leqslant$$
$$\leqslant |x_0|+\sqrt{\frac{(m-n)\,v\,(x_0,t_0)}{\varepsilon}},$$

содержащем точку (x_0,t_0), заключаем, что $w\,(x_0,t_0)=u\,(x_0,t_0)-m+\varepsilon\geqslant 0$, т. е. $u\,(x_0,t_0)\geqslant m-\varepsilon$. Отсюда в свою очередь в силу произвольности ε следует, что $u\,(x_0,t_0)\geqslant m$. Таким образом $u\,(x,t)\geqslant m$ всюду в D.

Заменяя $u\,(x,t)$ на $-u\,(x,t)$ и повторяя приведенное выше рассуждение, убеждаемся в справедливости и второго неравенства в (3.19).

3.4. Гладкость решений

В разделе 3.2 было показано, что решение $u\,(x,t)$ первой краевой задачи (3.7), (3.8) для уравнения теплопроводности (3.1) при требовании непрерывности первой производной функции $u\,(x,t)=\varphi\,(x)$ имеет в области D: $0<x<l,\ 0<t<T$ частные производные всех порядков

по переменным x, t. Точно также из формулы (3.16) раздела 3.3 был сделан вывод, что ограниченность и непрерывность функции $\varphi(x) = u(x,0)$, $-\infty < x < \infty$ гарантирует существование частных производных всех порядков решения $u(x,t)$ задачи Коши (3.13) для уравнения (3.1).

3.5. Неоднородное уравнение теплопроводности

Пусть $g(x,t)$, $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant t \leqslant \infty$ — заданная действительная ограниченная непрерывная функция. За носителя данных вместо прямой $t = 0$ примем прямую $t = \tau$, где τ — фиксированное положительное число, и введем функцию

$$v(x,t,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}} g(\xi,\tau)\, d\xi, \ t > \tau.$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \ t > \tau, \ v(x,\tau,\tau) = g(x,\tau).$$

На основании этих равенств заключаем, что функция

$$u(x,t) = \int\limits_0^t v(x,t,\tau) d\tau$$

является решением неоднородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t),$$

удовлетворяющим условию $u(x,0) = 0$.

3.6. Вопросы и задачи

1. Покажите, что в области $D = \{0 < t < T, \ 0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$, функция

$$u(x_1,x_2,t) = \exp\left[-\pi^2\Big(\frac{i^2}{l_1^2} + \frac{j^2}{l_2^2}\Big)t\right] \sin\frac{ix_1\pi}{l_1} \sin\frac{jx_2\pi}{l_2},$$

где i и j — натуральные числа, является решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

и удовлетворяет условиям

$$u(x_1, x_2, 0) = \sin\frac{ix_1\pi}{l_1}\sin\frac{jx_2\pi}{l_2},\ \ u|_\sigma = 0,$$

где σ — боковая поверхность области D.

2. В чем заключается принцип максимума для решения уравнения теплопроводности?

3. Докажите, что регулярное в области D решение уравнения (3.1), непрерывное в $D \cup S$, своего минимума достигает на S.

4. Поставьте первую краевую задачу для уравнения теплопроводности.

5. На чем основано доказательство единственности и устойчивости решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности?

6. Сведите первую краевую задачу

$$u_t = u_{xx} + f(x,t),$$

$$u(0,t) = \alpha(t),\ u(1,t) = \beta(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T_0$$

в прямоугольнике $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T_0\}$, к первой краевой задаче с однородными краевыми условиями на боковых сторонах.

4. Уравнения эллиптического типа

4.1. Основные свойства гармонических функций

4.1.1. Интегральное представление гармонических функций

Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0, \tag{4.1}$$

где Δ — дифференциальный оператор с частными производными второго порядка

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

называемый оператором Лапласа.

Характеристическая квадратичная форма, соответствующая уравнению (4.1),

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

положительно определена во всех точках пространства $\mathbb{R}^n$. Следовательно, это уравнение принадлежит эллиптическому типу всюду в $\mathbb{R}^n$.

Функция $u\Big(\boldsymbol{x}\Big)$, $\boldsymbol{x} = \Big(x_1, ..., x_n\Big)$, обладающая непрерывными частными производными второго порядка в области $D \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется гармонической функцией в области D.

Когда область D содержит бесконечно удаленную точку, приведенное выше определение гармонической функции нуждается в уточнении, т.к. понятие производной в бесконечно удаленной точке не имеет смысла.

Будем говорить, что функция $u\left(\boldsymbol{x}\right)$ гармонична в окрестности бесконечно удаленной точки (т. е. вне замкнутого шара $\{\boldsymbol{x} \in D: \ |\boldsymbol{x}| \leqslant R\}$ достаточно большого радиуса), если функция

$$v(\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{y}|^{2-n} u\left(\frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|}^2\right),$$

доопределенная в точке $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ как $\lim\limits_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{0}} v(\boldsymbol{y})$, гармонична в окрестности точки $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

В результате замены $\boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}$ имеем

$$u(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^{2-n} v\left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}\right).$$

В соответствии с этим под регулярным в окрестности бесконечно удаленной точки решением уравнения Лапласа понимается гармоническая в этой окрестности всюду, кроме бесконечно удаленной точки, функция $u(\boldsymbol{x})$, которая при $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ остается ограниченной в случае $n = 2$ и стремится к нулю не медленнее, чем $|\boldsymbol{x}|^{2-n}$ при $n > 2$.

Пусть D — область пространства $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей S, а $u(\boldsymbol{x})$ и $v(\boldsymbol{x})$ — заданные в ней действительные гармонические функции, непрерывные вместе со своими производными первого порядка в $D \cup S$.

Свойства гармонических функций:

1. Наряду с гармонической функцией $u(\boldsymbol{x})$ в области D гармонической является и функция $u(\lambda C\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h})$, где λ — действительная постоянная, C — постоянная действительная ортогональная матрица порядка n, $\boldsymbol{h} = (h_1, ..., h_n)$ — постоянный действительный вектор, причем предполагается, что точки $\boldsymbol{x}$ и $\lambda C\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}$ принадлежат области D.

2. Конечная линейная комбинация гармонических функций есть гармоническая функция.

3. Если $u(\boldsymbol{x})$ гармоничная в области D, то и функция

$$v(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^{2-n} u\left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}\right)$$

гармоническая всюду, где она определена.

4. Если гармоническая в области D функция $u(\boldsymbol{x})$ непрерывна в $D \cup S$ вместе со своими производными первого порядка и равна нулю на границе S области D, то $u(\boldsymbol{x}) = 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in D \cup S$.

5. Если нормальная производная $\dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{x}}}$ гармонической в области D функции $u(\boldsymbol{x})$, непрерывной вместе со своими производными первого порядка в $D \cup S$, равна нулю на границе S области D, то $u(\boldsymbol{x}) = \mathrm{const}$ для всех $x \in D$.

6. Интеграл, взятый по границе S от нормальной производной $\dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{x}}}$ гармонической в области D функции $u(\boldsymbol{x})$, непрерывной вместе со своими частными производными первого порядка в $D \cup S$, равен нулю.

Для гармонической в области D функции $u(\boldsymbol{x})$, непрерывной вместе со своими производными первого порядка в $D \cup S$, имеет место интегральное представление

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{w_n} \int\limits_S E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} dS_{\boldsymbol{y}} - \frac{1}{w_n} \int\limits_S u(\boldsymbol{y}) \frac{\partial E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} dS_{\boldsymbol{y}}, \quad (4.2)$$

где $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — элементарное решение уравнения Лапласа

$$E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-2} |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^{2-n}, \ n > 2, \\ -\ln |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|, \ n = 2, \end{cases} \quad (4.3)$$

$w_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, а Γ — гамма-функция Эйлера.

Для вывода формулы (4.2) выделим точку $\boldsymbol{x}$ из области D вмести с замкнутым шаром $\{\boldsymbol{y} \in D : \ |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \leqslant \varepsilon\}$, лежащим в D, и для оставшейся части D_ε области D, ограниченной поверхностью S и сферой $\{\boldsymbol{y} \in D: \ |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| = \varepsilon\}$, применим формулу

$$\int\limits_S \left[v(\boldsymbol{y}) \frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} - u(\boldsymbol{y}) \frac{\partial v(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} \right] dS_{\boldsymbol{y}} = 0, \tag{4.4}$$

в которой $v(\boldsymbol{y}) = E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$:

$$\int\limits_S \left[E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} - u(\boldsymbol{y}) \frac{\partial E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} \right] dS_{\boldsymbol{y}} =$$

$$= \int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=\varepsilon} \left[E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} - u(\boldsymbol{y}) \frac{\partial E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} \right] dS_{\boldsymbol{y}} = \tag{4.5}$$

$$= \int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=\varepsilon} E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} dS_{\boldsymbol{y}} - \int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=\varepsilon} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})] \frac{\partial E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} dS_{\boldsymbol{y}} -$$

$$-u(\boldsymbol{x}) \int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=\varepsilon} \frac{\partial E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} dS_{\boldsymbol{y}}.$$

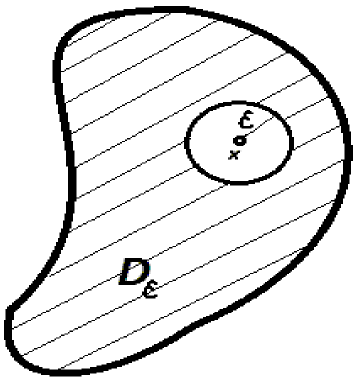

Рис. 1.

Учитывая то обстоятельство, что на сфере $\{\boldsymbol{y} \in D: \ |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| = \varepsilon\}$

$$E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\varepsilon^{n-2}}, \ n > 2, \\ -\ln \varepsilon, \ n = 2, \end{cases}$$

$$\frac{\partial E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} = -\frac{1}{\varepsilon^{n-1}},\ n \geqslant 2,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=\varepsilon} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})] \frac{\partial E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}}\, dS_{\boldsymbol{y}} = 0,$$

$$\int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=\varepsilon} \frac{d\boldsymbol{y}_y}{\varepsilon^{n-1}} = w_n,$$

в силу равенства

$$\int\limits_S \frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} dS_{\boldsymbol{y}} = 0 \tag{4.6}$$

из формулы (4.5) в пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем интегральное представление (4.2).

4.1.2. Теорема о среднем

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 41. *Если шар $\{\boldsymbol{y} \in D:\ |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \leqslant R\}$ лежит целиком в области D гармоничности функции $u(\boldsymbol{x})$, то значение этой функции в центре шара равно среднему арифметическому её значений на сфере $\{\boldsymbol{y} \in D:\ |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| = R\}$.*

Действительно, т.к. на сфере $\{\boldsymbol{y} \in D:\ |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \leqslant R\}$ имеют место равенства

$$E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)R^{n-2}},\ n > 2, \\ -\ln R,\ n = 2, \end{cases}$$

$$\frac{\partial E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} = -\frac{1}{R^{n-1}},\ n \geqslant 2,$$

то в силу (4.6) из формулы (4.2), написанной для шара $\{\boldsymbol{y} \in D:\ |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| < R\}$, получаем

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{w_n R^{n-1}} \int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=R} u(\boldsymbol{y}) dS_{\boldsymbol{y}}. \tag{4.7}$$

Записывая формулу (4.7) для сферы $\{\boldsymbol{y} \in D: \ |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| = \rho \leqslant R\}$ в виде

$$\rho^{n-1} u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{w_n} \int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=\rho} u(\boldsymbol{y}) dS_{\boldsymbol{y}}$$

и интегрируя по ρ в промежутке $0 \leqslant \rho \leqslant R$, получаем

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{n}{w_n R^n} \int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<R} u(\boldsymbol{y}) d\tau_{\boldsymbol{y}}, \tag{4.8}$$

где $\tau_{\boldsymbol{y}}$ — элемент объема по переменному $\boldsymbol{y}$, а $\dfrac{w_n R^n}{n}$ — объем шара $\{\boldsymbol{y} \in D: \ |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| < R\}$.

Формулы (4.7) и (4.8) известны под названием формул о среднем арифметическом для гармонических функций по сфере и по шару соответственно.

При $n = 2$ и $n = 3$, пользуясь полярными координатами, формулу (4.7) можно записать еще в виде

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(x_1 + R\cos\theta, x_2 + R\sin\theta) d\theta \tag{4.9}$$

и

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{2\pi} u(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \sin\theta d\psi,$$

где $y_1 = R\sin\theta\cos\psi, \ y_2 = R\sin\theta\sin\psi, \ y_3 = R\cos\theta.$

4.1.3. Принцип экстремума и его следствия

Обозначим через M и m верхнюю и нижнюю грани значений в области D гармонической функции $u(\boldsymbol{x})$.

На основании формулы (4.8) легко установить следующее свойство гармонических функций, известное под названием принципа экстремума для гармонических функций.

Теорема 42. *Отличная от постоянной гармоническая в области D функция $u(\boldsymbol{x})$ ни в одной точке $\boldsymbol{x} \in D$ не может принимать ни значения M, ни значения m.*

Когда $M = +\infty$ или $m = -\infty$, справедливость этого утверждения очевидна, ибо в каждой точке области D функция $u(\boldsymbol{x})$ принимает лишь конечное значение. Когда же $M \neq +\infty$, допустим обратное, т. е. $u(\boldsymbol{x}_0) = M$, $\boldsymbol{x}_0 \in D$, и рассмотрим шар $\{\boldsymbol{x} \in D : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \varepsilon\}$, лежащий в D. В каждой точке этого шара $u(\boldsymbol{x}) = M$. Действительно, если бы в точке $\boldsymbol{y}$ при $\{\boldsymbol{y} \in D : |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0| < \varepsilon\}$ имело место неравенство $u(\boldsymbol{y}) < M$ (неравенство $u(\boldsymbol{y}) > M$ исключено), то в силу непрерывности $u(\boldsymbol{x})$ это неравенство сохранилось бы всюду в некоторой окрестности $|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}| < \delta$ точки $\boldsymbol{y}$ и на основании формулы (4.8), примененной в случае шара $\{\boldsymbol{x} \in D : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \varepsilon\}$, получилось бы бессмысленное неравенство $M < M$. Следовательно, $u(\boldsymbol{x}) = M$ всюду в шаре $\{\boldsymbol{x} \in D : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \varepsilon\}$.

Пусть теперь $\boldsymbol{x}$ — произвольная фиксированная точка области D и l — непрерывная кривая, соединяющая $\boldsymbol{x}$ с $\boldsymbol{x}_0$ и лежащая в D. Пусть число ε меньше, чем расстояние между границей S области D и кривой l. Передвигая центр $\boldsymbol{y}$ шара $\{\boldsymbol{\eta} \in D : |\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{x}_0| < \varepsilon\}$ из точки $\boldsymbol{x}_0$ в точку $\boldsymbol{x}$ по кривой l и пользуясь уже доказанным фактом, что при любом положении $\boldsymbol{y}$ внутри этого шара $u = M$, получаем $u(\boldsymbol{x}) = M$. Следовательно, $u(\boldsymbol{x}) = M$ всюду в области D. Полученное противоречие доказывает справедливость первой части сформулированного утверждения. Аналогично доказывается и вторая его часть.

Если дополнительно известно, что гармоническая в области D функция $u(\boldsymbol{x})$ непрерывна в $D \cup S$, то она обязательно примет свое максимальное (минимальное) значение в некоторой точке $\boldsymbol{x}_0 \in D \cup S$. В силу только что доказанного свойства гармонических функций точка экстремума $\boldsymbol{x}_0$ не может быть внутренней для области D и, значит, $\boldsymbol{x}_0 \in S$.

Из принципа экстремума для гармонических функций следует, что задача Дирихле (или первая краевая задача)

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \\ &u|_S = \varphi, \end{aligned} \tag{4.10}$$

где φ — заданная на S действительная непрерывная функция, не может иметь более одного регулярного в области D решения, непрерывного в замкнутой области $D \cup S$. В самом деле, если $u(\boldsymbol{x})$ и $v(\boldsymbol{x})$ являются решениями этой задачи, то их разность $w(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}) - v(\boldsymbol{x})$ будет равна нулю на границе S области D и поэтому в силу принципа экстремума $w(\boldsymbol{x}) = 0$, т. е. $u(\boldsymbol{x}) = v(\boldsymbol{x})$ всюду в $D \cup S$.

4.2. Функция Грина. Решение задачи Дирихле для шара и полупространства

4.2.1. Понятие функции Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D называется функция $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ двух точек $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \in D \cup S$, обладающая свойствами:

1) Она имеет вид

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) + g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}), \tag{4.11}$$

где $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ — элементарное решение уравнения Лапласа (см. формулу (4.3)), $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ — гармоническая функция как по $\boldsymbol{x} \in D$, так и по $\boldsymbol{\xi} \in D$;

2) Когда точка $\boldsymbol{x}$ или $\boldsymbol{\xi}$ лежит на границе S области D, то

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0. \tag{4.12}$$

Легко видеть, что $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \geqslant 0$ всюду в области D.

В самом деле, обозначим через D_δ часть области D, лежащую вне шара $\{\boldsymbol{\xi} \in D : \ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}| \leqslant \delta\}$ достаточно малого радиуса δ. Т.к. $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\xi}} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = +\infty$, то при достаточно малом δ имеем $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) > 0$, когда $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}| < \delta$. Следовательно, на границе области D_δ имеем $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \geqslant 0$, и поэтому, в силу принципа экстремума, $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \geqslant 0$ для всех $x \in D_\delta$. Отсюда заключаем, что $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \geqslant 0$ всюду в $D \cup S$.

Заметим, что функция Грина $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ симметрична относительно точек $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{\xi}$.

Если в равенстве (4.2) примем, что $u(\boldsymbol{x})$ — решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа, и вместо $E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ возьмем $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$, то повторением приведенного выше рассуждения при выводе формулы (4.2) с учетом (4.11) и (4.12) получим

$$u(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{w_n}\int\limits_S \frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{\xi}}}\varphi(\boldsymbol{\xi})\,dS_{\boldsymbol{\xi}}, \tag{4.13}$$

где φ — заданная действительная непрерывная функция.

Когда функция Грина известна, формула (4.13) дает решение задачи Дирихле в следующей постановке: ищется гармоническая в области D функция $u(\boldsymbol{x})$, непрерывная в $D \cup S$ и удовлетворяющая краевому условию

$$u|_S = \varphi. \tag{4.14}$$

Гармоничность представленной формулой (4.13) функции $u(\boldsymbol{x})$ следует из гармоничности функции Грина $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ по $\boldsymbol{x}$ при $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\xi}$. То, что эта функция удовлетворяет и краевому условию (4.14), требует особого доказательства.

4.2.2. Решение задачи Дирихле для шара. Формула Пуассона

Мы сейчас явно построим функцию Грина, когда D представляет собой шар, и в этом случае покажем, что представленная формулой (4.13) гармоническая функция действительно удовлетворяет краевому условию (4.14).

Пусть область D представляет собой шар $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| < 1\}$, а $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{\xi}$ — внутренние точки этого шара. Точка $\boldsymbol{\xi}' = \dfrac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2}$ симметрична точке $\boldsymbol{\xi}$ относительно сферы $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| = 1\}$. Покажем, что функция Грина $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ задачи Дирихле для шара D имеет вид

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) - E\left(|\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\xi}, \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right). \tag{4.15}$$

Действительно, т.к.

$$\left||\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\xi} - \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right| = \left[|\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{\xi}|^2 - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{\xi} + 1\right]^{1/2} = \left||\boldsymbol{\xi}|\,\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right| =$$

$$= |\boldsymbol{\xi}|\left|\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2}\right| = |\boldsymbol{x}|\left|\boldsymbol{\xi} - \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}\right|, \tag{4.16}$$

функция $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = -E\left(|\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\xi}, \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right)$ при $|\boldsymbol{x}| < 1,\ |\boldsymbol{\xi}| < 1$ является гармонической как по $\boldsymbol{x}$, так и по $\boldsymbol{\xi}$. А при $|\boldsymbol{\xi}| = 1$ имеем

$$|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}| = \left[|\boldsymbol{x}|^2 - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{\xi} + 1\right]^{\frac{1}{2}} = \left||\boldsymbol{\xi}|\,\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right| = \left||\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\xi} - \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right|. \tag{4.17}$$

Следовательно, представленная формулой (4.15) функция $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к функции Грина.

Так как при $|\boldsymbol{\xi}| = 1$ в силу (4.17)

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{\xi}}} = -\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\xi_i(\xi_i - x_i)}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}|^n} - |\boldsymbol{x}|\frac{\xi_i\left(|\boldsymbol{x}|\,\xi_i - \frac{x_i}{|\boldsymbol{x}|}\right)}{\left||\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\xi} - \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right|^n}\right\} =$$

$$= -\frac{1 - |\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}|^n},$$

то формула (4.13) в рассматриваемом случае запишется в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{w_n} \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \frac{1 - |\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}|^n} \varphi(\boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}}. \tag{4.18}$$

Эта формула носит название формулы Пуассона.

В случае $n = 3$ и $n = 2$ формула Пуассона в полярных координатах запишется соответственно в виде

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - |\boldsymbol{x}|^2}{\left(1 - 2|\boldsymbol{x}|\cos\gamma + |\boldsymbol{x}|^2\right)^{3/2}} \varphi \sin\theta d\psi,$$

где $\varphi = \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\xi_1 = \sin\theta\cos\psi$, $\xi_2 = \sin\theta\sin\psi$, $\xi_3 = \cos\theta$, $|\boldsymbol{x}|\cos\gamma = \boldsymbol{x}\boldsymbol{\xi}$ и

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - |\boldsymbol{x}|^2}{1 - 2|\boldsymbol{x}|\cos(\theta - \psi) + |\boldsymbol{x}|^2} \varphi(\cos\psi, \sin\psi) d\psi, \tag{4.19}$$

где $x_1 = |\boldsymbol{x}|\cos\theta$, $x_2 = |\boldsymbol{x}|\sin\theta$, $\xi_1 = \cos\psi$, $\xi_2 = \sin\psi$.

Формула (4.18) была выведена для единичного шара с центром в точке $\boldsymbol{x} = 0$. Если $u(\boldsymbol{x})$ — гармоническая в шаре $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| < R\}$ функция, непрерывная в шаре $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| \leqslant R\}$ и удовлетворяющая краевому условию $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{y}} u(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{y})$, $|\boldsymbol{x}| < R$, $|\boldsymbol{y}| = R$, то функция $v(\boldsymbol{z}) = u(R\boldsymbol{z})$ будет гармонической в шаре $\{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{z}| < 1\}$, непрерывной при $|\boldsymbol{z}| \leqslant 1$ и удовлетворяющей условию

$$\lim_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{t}} v(\boldsymbol{z}) = \varphi(R\boldsymbol{t}), \ |\boldsymbol{z}| < 1, \ |\boldsymbol{t}| = 1.$$

Поэтому в силу формулы (4.18) имеем

$$v(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{w_n} \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \frac{1 - |\boldsymbol{z}|^2}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{z}|^n} \varphi(R\boldsymbol{\xi})\, dS_{\boldsymbol{\xi}},$$

т. е.

$$u(\boldsymbol{x}) = v\left(\frac{\boldsymbol{x}}{R}\right) = \frac{1}{w_n R} \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \frac{R^2 - |\boldsymbol{x}|^2}{|R\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}|^n} R^{n-1} \varphi(R\boldsymbol{\xi})\, dS_{\boldsymbol{\xi}},$$

или, после замены $\boldsymbol{y} = R\boldsymbol{\xi}$,

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{w_n R} \int\limits_{|\boldsymbol{y}|=R} \frac{R^2 - |\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^n} \varphi(\boldsymbol{y})\, dS_{\boldsymbol{y}}. \tag{4.20}$$

Пусть $u(\boldsymbol{x})$ — гармоническая в шаре $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \,|\,|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < R\}$ функция, непрерывная вплоть до границы и удовлетворяющая условию $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{y}} u(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{y})$, $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < R$, $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0| = R$. Так как функция $w(\boldsymbol{z}) = u(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}_0)$ гармонична в шаре $\{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{z}| < R\}$, непрерывна при $|\boldsymbol{z}| \leqslant R$ и удовлетворяет условию $\lim\limits_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{t}} w(\boldsymbol{z}) = \varphi(\boldsymbol{t} + \boldsymbol{x}_0)$, $|\boldsymbol{z}| < R$, $|\boldsymbol{t}| = R$, то в силу (4.20) можем написать

$$w(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{w_n R} \int\limits_{|\boldsymbol{t}|=R} \frac{R^2 - |\boldsymbol{z}|^2}{|\boldsymbol{t} - \boldsymbol{z}|^n} \varphi(\boldsymbol{t} + \boldsymbol{x}_0)\, dS_{\boldsymbol{t}},$$

откуда сразу следует формула Пуассона для шара $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \,|\,|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < R\}$

$$u(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{w_n R} \int\limits_{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}_0|=R} \frac{R^2 - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}|^n} \varphi(\boldsymbol{\xi})\, dS_{\boldsymbol{\xi}}. \tag{4.21}$$

При $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ из формулы (4.21) снова получаем формулу (4.7) о среднем арифметическом.

Теперь покажем, что определенная по формуле Пуассона функция $u(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет краевому условию (4.14), и стало быть, эта формула дает решение задачи Дирихле в приведенной выше постановке.

Для простоты ограничимся рассмотрением случая $n = 2$. Так как $u(\boldsymbol{x}) = 1$ является гармонической функцией, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} u(\boldsymbol{x}) = 1$, $|\boldsymbol{x}| < 1$, где $\boldsymbol{x}_0$ — произвольная фиксированная точка на окружности $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \ |\boldsymbol{x}| = 1\}$, то для всех точек $\boldsymbol{x}$ в круге $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \ |\boldsymbol{x}| < 1\}$ из формулы (4.18) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - |\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}|^2}\, d\psi = 1, \ \ \xi_1 = \cos\psi, \ \ \xi_2 = \sin\psi. \tag{4.22}$$

На основании формул (4.18) и (4.22) имеем

$$u(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - |\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}|^2}[\varphi(\boldsymbol{\xi}) - \varphi(\boldsymbol{x}_0)]\, d\psi, \ \ |\boldsymbol{x}| < 1. \tag{4.23}$$

В силу равномерной непрерывности функции φ на окружности $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \ |\boldsymbol{x}| = 1\}$ для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех ψ и ψ_0, $\xi_1 = \cos\psi$, $\xi_2 = \sin\psi$, $x_{1_0} = \cos\psi_0$, $x_{2_0} = \sin\psi_0$, удовлетворяющих условию $|\psi - \psi_0| < \delta$, имеет место неравенство

$$|\varphi(\boldsymbol{\xi}) - \varphi(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon. \tag{4.24}$$

Перепишем выражение (4.23) в виде

$$u(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x}_0) = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\psi_0-\delta}^{\psi_0+\delta} \frac{1 - |\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}|^2}[\varphi(\boldsymbol{\xi}) - \varphi(\boldsymbol{x}_0)]d\psi,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{\psi_0-\delta} + \int\limits_{\psi_0+\delta}^{2\pi}\right)\frac{1-|\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}|^2}[\varphi(\boldsymbol{\xi})-\varphi(\boldsymbol{x}_0)]d\psi.$$

На основании (4.22) и (4.24) заключаем, что $|I_1| < \varepsilon$. После выбора $\delta(\varepsilon)$ возьмем $\boldsymbol{x}$ настолько близко к $\boldsymbol{x}_0$, чтобы имело место неравенство

$$\left(\int\limits_0^{\psi_0-\delta} + \int\limits_{\psi_0+\delta}^{2\pi}\right)\frac{1-|\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}|^2}d\psi < \frac{\pi\varepsilon}{M},\ \ M = \max_{0\leq\psi\leqslant 2\pi}|\varphi(\boldsymbol{\xi})|,$$

т. е. $|I_2| < \varepsilon$. Следовательно, $|u(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x}_0)| < 2\varepsilon$ и, поэтому,

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} u(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}_0),\ \ |\boldsymbol{x}| < 1,\ \ |\boldsymbol{x}_0| = 1.$$

4.2.3. Решение задачи Дирихле для полупространства

Рассмотрим теперь случай, когда область D совпадает с полупространством $x_n > 0$, а от искомого решения задачи Дирихле потребуем, чтобы оно было ограничено. Пусть $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{\xi}$ — точки этого полупространства, а $\boldsymbol{\xi}' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, -\xi_n)$ — точка, симметричная точке $\boldsymbol{\xi}$ относительно плоскости $\xi_n = 0$. Так как функция $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = -E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}')$ при $x_n > 0$, $\xi_n > 0$ является гармонической как по x, так и по $\boldsymbol{\xi}$, и, кроме того, $E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}')$ при $\xi_n = 0$, то

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) - E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}') \tag{4.25}$$

является функцией Грина для рассматриваемого полупространства.

Будем предполагать, что для искомого решения $u(\boldsymbol{x})$ задачи Дирихле в рассматриваемом случае справедлива формула (4.14). Это заведомо так, если $\forall\ \boldsymbol{x}\in D$ при $|\boldsymbol{x}|\to\infty$

$$|u(\boldsymbol{x})| \leq \frac{A}{|\boldsymbol{x}|^h},\ \ \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leq \frac{A}{|\boldsymbol{x}|^{h+1}},\ \ i = 1,\ldots,n,$$

где A и h — положительные постоянные. В соответствии с этим при больших $\delta = \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ и заданная на плоскости $y_n = 0$ функция $\varphi(y_1, \ldots, y_{n-1})$ должна удовлетворять условию

$$|\varphi| < \frac{A}{\delta^h}.$$

Подставляя выражение $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ из формулы (4.25) в правую часть формулы (4.13) и учитывая, что

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{\xi}}} = -\frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_n} = \frac{\xi_n - x_n}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}|^n} - \frac{\xi_n + x_n}{|\boldsymbol{\xi}' - \boldsymbol{x}|^n} =$$

$$= -\frac{2x_n}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1} (\xi_i - x_i)^2 + x_n^2\right]^{\frac{n}{2}}}$$

при $\xi_n = 0$, получаем формулу

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}} x_n \int\limits_{\xi_n=0} \frac{\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1} (x_i - \xi_i)^2 + x_n^2\right]^{\frac{n}{2}}} d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}, \qquad (4.26)$$

дающую решение задачи Дирихле с условием

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}} u(\boldsymbol{x}) = \varphi(y_1, \ldots, y_{n-1}),\ x_n > 0,\ y_n = 0, \qquad (4.27)$$

для полупространства $x_n > 0$ и носящую также название формулы Пуассона.

Тот факт, что, определенная по формуле (4.26) функция удовлетворяет краевому условию (4.27), доказывается точно также, как это было сделано выше в случае задачи Дирихле для круга.

Решение задачи Дирихле для полупространства $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k - b > 0$ редуцируется к рассмотренному случаю, если учесть, что наряду с $u(\boldsymbol{x})$ гармонической является и функция $u(\lambda C\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h})$, где λ — постоянная, C — постоянная ортогональная матрица, а $\boldsymbol{h}$ — постоянный вектор.

4.2.4. Некоторые следствия, вытекающие из формулы Пуассона. Теоремы Лиувилля и Гарнака

Из формулы (4.20) следует справедливость утверждения.

Теорема 43. *Если гармоническая в пространстве $\mathbb{R}^n$ функция всюду неотрицательна (неположительна), то она постоянна.*

Действительно, т.к. при $|\boldsymbol{x}| < R$, $|\boldsymbol{y}| = R$ имеют место неравенства $R - |\boldsymbol{x}| \leqslant |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \leqslant R + |\boldsymbol{x}|$ и по условию $u(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$, то из формулы (4.20) в силу (4.7) следует, что

$$R^{n-2}\frac{R - |\boldsymbol{x}|}{(R + |\boldsymbol{x}|)^{n-1}}u(0) \leqslant u(\boldsymbol{x}) \leqslant R^{n-2}\frac{R + |\boldsymbol{x}|}{(R - |\boldsymbol{x}|)^{n-1}}u(0) \qquad (4.28)$$

для любого $R > 0$. Отсюда, произвольно фиксируя точку $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ и затем устремляя $R \to \infty$, получаем, что в каждой точке $\boldsymbol{x}$ пространства $\mathbb{R}^n$ функция $u(\boldsymbol{x}) = u(0)$.

Из формулы (4.28) также непосредственно вытекает справедливость следующей теоремы Лиувилля.

Теорема 44. *Если гармоническая в $\mathbb{R}^n$ функция $u(\boldsymbol{x})$ ограничена сверху (снизу), то она постоянна.*

В самом деле, пусть $u(\boldsymbol{x}) \leqslant M \ \forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, где $M = const$. Так как функция $M - u(\boldsymbol{x})$ гармонична в $\mathbb{R}^n$ и неотрицательна, то, как только что было доказано, $M - u(\boldsymbol{x}) = M - u(0)$, т. е. $u(\boldsymbol{x}) = u(0)$.

Теорема Лиувилля позволяет утверждать, что рассмотренная в предыдущем разделе задача Дирихле для полупространства $x_n > 0$ в классе ограниченных функций не может иметь более одного решения.

Действительно, разность $v(\boldsymbol{x}) = u_1(\boldsymbol{x}) - u_2(\boldsymbol{x})$ любых двух решений $u_1(\boldsymbol{x})$ и $u_2(\boldsymbol{x})$ этой задачи удовлетворяет краевому условию $v(\boldsymbol{x}) = 0$ при $x_n = 0$. Рассмотрим функцию

$$w(\boldsymbol{x}) = \left\{ \begin{array}{c} v(x_1, \ldots, x_n),\ x_n \geqslant 0, \\ -v(x_1, \ldots, -x_n),\ x_n \leqslant 0, \end{array} \right.$$

которая гармонична как при $x_n > 0$, так и при $x_n < 0$. Более того, функция $w(\boldsymbol{x})$ гармонична во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, ибо в шаре $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ |\boldsymbol{x}| < R\}$ $\forall\ R > 0$ она совпадает с гармонической функцией $w^*(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющей краевому условию $w^*(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{x})$ при $|\boldsymbol{x}| = R$. Так как по условию $w(\boldsymbol{x})$ ограничена, то в силу теоремы Лиувилля она постоянна. Но $w(\boldsymbol{x}) = 0$ при $x_n = 0$, т. е. $w(\boldsymbol{x}) = 0$ всюду в $\mathbb{R}^n$ и, стало быть, $u_1(\boldsymbol{x}) = u_2(\boldsymbol{x})$.

Пользуясь принципом экстремума для гармонических функций и формулой Пуассона (4.21), легко можно получить доказательство следующей теоремы Гарнака.

Теорема 45. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(\boldsymbol{x})$ *гармонических в области* D *функций* $u_k(\boldsymbol{x})$, *непрерывных в* $D \cup S$, *равномерно сходится на границе* S *области* D, *то этот ряд равномерно сходится в* $D \cup S$ *и его сумма* $u(\boldsymbol{x})$ *гармонична в* D.

Действительно, из равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y} \in S$, следует, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$: $\forall\ p \geqslant 1$

$$\Big| \sum_{i=1}^{p} u_{N+i}(\boldsymbol{x}) \Big| < \varepsilon.$$

Отсюда, ввиду того, что конечная сумма $\sum\limits_{i=1}^{p} u_{N+i}(\boldsymbol{x})$ гармонична в D и непрерывна в $D \cup S$, в силу принципа экстремума заключаем, что $\left| \sum\limits_{i=1}^{p} u_{n+i}(\boldsymbol{x}) \right| < \varepsilon\ \forall\ \boldsymbol{x} \in D \cup S$. Последнее неравенство, как известно из курса математического анализа, является условием, необходимым и достаточным для равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(\boldsymbol{x})$ в $D \cup S$.

Пусть $\boldsymbol{x}_0$ — произвольная точка области D и шар $\{\boldsymbol{y} \in D: \ |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0| < R\}$ лежит внутри D. Каждую гармоническую функцию $u_k(\boldsymbol{x})$ в этом шаре можно представить формулой Пуассона (4.21)

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{w_n R} \int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0|=R} \frac{R^2 - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2}{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^n} u_k(\boldsymbol{y})\, dS_{\boldsymbol{y}}.$$

Следовательно, т.к. равномерно сходящийся ряд можно интегрировать почленно, имеем

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{w_n R} \int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0|=R} \frac{R^2 - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^2}{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^n} u_k(\boldsymbol{y})\, dS_{\boldsymbol{y}} =$$

$$= \frac{1}{w_n R} \int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0|=R} \frac{R^2 - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2}{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^n} u(\boldsymbol{y})\, dS_{\boldsymbol{y}},$$

откуда и следует гармоничность $u(\boldsymbol{x})$ в шаре $\{\boldsymbol{x} \in D : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < R\}$. Так как $\boldsymbol{x}_0$ — произвольная точка области D, то тем самым гармоничность $u(\boldsymbol{x})$ доказана всюду в D.

4.3. Вопросы и задачи

1. Запишите оператор Лапласа в полярной системе координат.

2. Сформулируйте определение гармонической функции. Докажите одно из свойств гармонических функций.

3. Найдите условие, при соблюдении которого в круге

$x^2+y^2=r^2<R^2$ задача

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)=0, \quad 0 \leqslant r < \mathrm{R}, \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial r}\Big|_{r=1} = 2x^2+A, \quad r=R \end{cases}$$

имеет решение.

4. Пусть шар $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \ |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| \leqslant R\}$ лежит в области гармоничности функции $u(\boldsymbol{x})$. Покажите справедливость формулы, выражающей теорему о среднем

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{w_n R^{n-1}} \int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=R} u(\boldsymbol{y}) = dS_{\boldsymbol{y}} \text{ для сферы } |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| = R.$$

5. Найдите условие, при соблюдении которого для решения $u(x,y)$ задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x^2+y^2<1, \\ u|_{x^2+y^2=1} = a + x^3y^3 \end{cases}$$

справедлива формула

$$u(0,0)=0.$$

6. Докажите симметричность функции Грина $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, т. е.

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}).$$

7. Покажите, что гармоническая функция в области гармоничности имеет производные всех порядков.

8. Найдите гармоническую в полуплоскости $y > 0$ функцию $u(x, y)$, если известно, что

$$u(x, 0) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

9. Покажите справедливость тождества

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - |\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2} d\psi = 1,$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ — точка круга $|\boldsymbol{x}| < 1$, а $\boldsymbol{y} = (\cos\psi, \sin\psi)$ — точка на окружности $|\boldsymbol{y}| = 1$.

10. Может ли сохранять знак гармоническая в $\mathbb{R}^n$ функция, отличная от постоянной?

5. Метод разделения переменных (метод Фурье)

5.1. Решение смешанных задач для уравнений гиперболического типа методом разделения переменных

Метод разделения переменных (метод Фурье) используют при построении решений смешанных задач для широкого класса уравнений с частными производными.

Изложение схемы метода в данном разделе рассмотрим на примере одномерного волнового уравнения, описывающего процесс колебания струны длины l:

$$u_{tt} = u_{xx}. \tag{5.1}$$

Суть метода Фурье состоит в том, что сначала ищем нетривиальное решение уравнения (5.1), в виде произведения двух функций, одна из которых зависит от x, другая от t, т. е. в виде

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t). \tag{5.2}$$

Подставляя выражение (5.2) для $u(x,t)$ в уравнение (5.1), получаем

$$X(x)T''(t) = X''(x)T(t)$$

или

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{5.3}$$

Т.к. левая часть (5.3) не зависит от t, а правая часть — от x, то

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = const\,. \tag{5.4}$$

Обозначив через $-\lambda$ постоянную в правой части (5.4), перепишем эти равенства в виде

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{5.5}$$

и

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \tag{5.6}$$

представляющие собой обыкновенные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что общее решение $X(x)$ уравнения (5.5) имеет вид

$$X = C_1 x + C_2 \tag{5.7}$$

при $\lambda = 0$,

$$X = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 sin\sqrt{\lambda}x \tag{5.8}$$

при $\lambda > 0$ и

$$X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \tag{5.9}$$

при $\lambda < 0$, где C_1 и C_2 — произвольные действительные постоянные. Точно также в соответствии с тем, что $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ или $\lambda < 0$, общее решение уравнения (5.6) запишется в виде

$$\begin{gathered} T = C_3 t + C_4, \\ T = C_3 \cos\sqrt{\lambda}t + C_4 sin\sqrt{\lambda}t, \\ T = C_3 e^{\sqrt{-\lambda}t} + C_4 e^{-\sqrt{-\lambda}t}, \end{gathered} \tag{5.10}$$

где C_3 и C_4 — произвольные действительные постоянные.

Пусть требуется найти нетривиальное (не равное тождественно нулю) регулярное в полуполосе $0 < x < l$, $t > 0$ решение $u(x,t)$ уравнения (5.1), непрерывное при $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t \geqslant 0. \tag{5.11}$$

Будем искать решение задачи (5.1), (5.11) в виде (5.2). Тогда функции $X(x)$ и $T(t)$ должны удовлетворять уравнениям (5.5) и (5.6) соответственно и условиям $X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0$ или, что то же самое,

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0. \tag{5.12}$$

Задача отыскания нетривиального решения $X(x)$ уравнения (5.5), удовлетворяющего условиям (5.12), является частным случаем так называемой общей спектральной задачи или задачи Штурма–Лиувилля. Значение λ, для которого уравнение (5.5) имеет нетривиальное решение $X(x)$, удовлетворяющее условиям (5.12), называется собственным числом, а само решение $X(x)$ — соответствующей λ собственной функцией.

Нетривиальные решения задачи (5.5), (5.12) вида (5.7) и (5.9) не существуют, ибо, подставляя выражения (5.7) и (5.9) для $X(x)$ в (5.12), получаем $C_2 = 0$, $lC_1 + C_2 = 0$ в первом случае и $C_1 + C_2 = 0$, $e^{\sqrt{-\lambda}l}C_1 + e^{-\sqrt{-\lambda}l}C_2 = 0$ во втором случае, т. е. в обоих случаях $C_1 = C_2 = 0$. Теперь, подставляя выражение (5.8) в (5.12), будем иметь $C_1 = 0$, $C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Отсюда видно, что задача (5.5), (5.12) будет иметь нетривиальное решение вида (5.8) тогда и только тогда, когда

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0,$$

т. е. когда $\lambda = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$, где $n = 1, 2, \ldots$

Таким образом, мы пришли к заключению, что $\lambda = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$, где $n = 1, 2, \ldots$, являются собственными числами задачи (5.5), (5.12), а функции $C_n \sin\dfrac{\pi n}{l}x$, $n = 1, 2, \ldots$, где C_n — произвольные действительные постоянные, отличные от нуля, — соответствующими им собственными функциями.

Ниже будем предполагать, что постоянные $C_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ В соответствии с этим система собственных функций запишется в виде $X_n(x) = \sin\dfrac{\pi n}{l}x$, $n = 1, 2, \ldots$ Следовательно, однородная задача (5.1), (5.11) имеет бесконечное множество линейно независимых решений

$u_n(x,t) = \sin\dfrac{\pi n}{l}x \cdot T_n(t)$, где в силу (5.10)

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{\pi n}{l}t + B_n\sin\frac{\pi n}{l}t,$$

а A_n и B_n — произвольные действительные постоянные.

Набор решений

$$u_n(x,t) = \sin\frac{\pi n}{l}x\Big(A_n\cos\frac{\pi n}{l}t + B_n\sin\frac{\pi n}{l}t\Big),\ n = 1, 2\ldots, \tag{5.13}$$

уравнения (5.1) позволяет найти решение следующей основной смешанной задачи: требуется определить регулярное в полуполосе $0 < x < l$, $t > 0$ решение $u(x,t)$ уравнения (5.1), непрерывное при $0 \leqslant x \leqslant l, t \geqslant 0$, удовлетворяющее краевым условиям (5.11) и начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \tag{5.14}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие действительные функции.

Решение $u(x,t)$ задачи (5.1), (5.11), (5.14) будем искать в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\left(A_n\cos\frac{\pi n}{l}t + B_n\sin\frac{\pi n}{l}t\right). \tag{5.15}$$

Очевидно, что представленная формулой (5.15) функция $u(x,t)$, в предположении равномерной сходимости ряда в правой её части, удовлетворяет краевым условиям (5.11). Для того чтобы она удовлетворяла и начальным условиям (5.14), мы должны иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi n}{l}x = \varphi(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{l}B_n\sin\frac{\pi n}{l}x = \psi(x), \tag{5.16}$$

откуда находим

$$A_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx, \;\; B_n = \frac{2}{\pi n} \int\limits_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx.$$

Из теории рядов Фурье известно, что непрерывность на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ функций $\varphi''(x)$ и $\psi'(x)$ и выполнение условий $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$ гарантируют возможность представлений (5.16) и равномерную сходимость тригонометрического ряда в правой части (5.15). Кроме того, в этом случае сумма $u(x,t)$ ряда (5.15) будет непрерывно дифференцируемой функцией при $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющей условиям (5.11) и (5.14).

Если дополнительно известно, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ вместе со своими производными до третьего и второго порядка соответственно, причем $\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(l) = \varphi''(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, то представленная формулой (5.15) функция $u(x,t)$ будет обладать частными производными до второго порядка включительно, которые могут быть вычислены дифференцированием почленно ряда в правой части (5.15). Очевидно, что в этих предположениях сумма $u(x,t)$ ряда (5.15) будет искомым решением основной смешанной задачи (5.1), (5.11), (5.14). Каждое из слагаемых

$$\sin \frac{\pi n}{l} x \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{\pi n}{l} t \right), \;\; n = 1, 2, \ldots,$$

в правой части (5.15) в теории распространения звука носит название собственного колебания (или гармоники) струны с закрепленными в точках $(0,0)$, $(l,0)$ концами.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), \tag{5.17}$$

где $f(x,t)$ — заданная действительная непрерывная функция.

Решение $u(x,t)$ уравнения (5.17) будем искать в виде ряда $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi n}{l} x T_n(t)$. Разложим функцию $f\,(x,t)$ в ряд Фурье по системе $\Big\{\sin\dfrac{\pi n}{l}x\Big\}_{n=1}^{\infty}$:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\ \ f_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx.$$

Тогда для определения $T_n(t)$ из (5.17) получаем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение

$$T_n''(t) + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t),$$

одним из частных решений которого является функция

$$T_{n_{\text{част}}}(t) = \frac{l}{\pi n}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi n}{l}(t-\tau)d\tau.$$

Следовательно, общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{\pi n}{l}t + B_n\sin\frac{\pi n}{l}t + \frac{l}{\pi n}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi n}{l}(t-\tau)d\tau,$$

где A_n и B_n — произвольные действительные постоянные.

Набор решений

$$u_n(x,t) = \sin\frac{\pi n}{l}x\Big[A_n\cos\frac{\pi n}{l}t +$$

$$+ B_n\sin\frac{\pi n}{l}t + \frac{l}{\pi n}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi n}{l}(t-\tau)d\tau\Big],\ n = 1, 2, \ldots,$$

уравнения (5.17) позволяет исследовать смешанную задачу (5.17), (5.11), (5.14). Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ представляют собой суммы рядов (5.16), а $f(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\dfrac{\pi n}{l}x$ то, допуская возможность почленного интегрирования и дифференцирования этих рядов, решение $u(x,t)$ смешанной задачи (5.17), (5.11), (5.14) можно выписать в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\Big[A_n\cos\frac{\pi n}{l}t+$$

$$+B_n\sin\frac{\pi n}{l}t+\frac{l}{\pi n}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi n}{l}(t-\tau)d\tau\Big].$$

Заметим что, когда краевые условия неоднородны, т. е. когда вместо (5.11) имеем $u(0,t)=\alpha(t)$, $u(l,t)=\beta(t)$, где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции, в результате замены $u(x,t)=v(x,t)+\alpha(t)+\dfrac{x}{l}\Big[\beta(t)-\alpha(t)\Big]$ искомого решения $u(x,t)$ уравнения (5.17), для определения $v(x,t)$ получаем уравнение

$$v_{tt}=v_{xx}+f(x,t)-\alpha''(t)-\frac{x}{l}\left[\beta''(t)-\alpha''(t)\right]$$

с однородными краевыми условиями $v(0,t)=v(l,t)=0$ и соответствующим образом измененными начальными условиями.

5.2. Решение смешанных задач для уравнений параболического типа методом разделения переменных

Параболические уравнения наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии, и простейшим примером таких уравнений является одномерное уравнение теплопроводности

$$u_t=u_{xx}+f(x,t). \tag{5.18}$$

Основные свойства решений этого уравнения не зависят от u.

Например, к первой краевой задаче для уравнения теплопроводности в прямоугольнике $D=\{0<x<l,\ 0<t<T\}$,

приводит задача о нахождении температуры $u(x,t)$ в теплоизолированном стержне, если известна его начальная температура на концах стержня в последующее время.

Рассмотрим следующую задачу

$$u_t = u_{xx} + f(x,t), \tag{5.19}$$

$$u(0,t) = \mu(t),\ u(l,t) = \nu(t), \tag{5.20}$$

$$u(x,0) = g(x), \tag{5.21}$$

предполагая, что функции $\mu(t)$, $\nu(t)$, $g(x)$ непрерывны и

$$g(0) = \mu(0),\ g(l) = \nu(0).$$

При решении этой задачи существенно, что решение ищется при $t > 0$, аналогичная задача для отрицательных значений t, вообще говоря, не имеет решения. Уравнение теплопроводности существенно меняется при замене t на $-t$. Это типичное уравнение необратимого процесса.

Поскольку метод Фурье применим лишь к задаче с однородными краевыми условиями, то представим $u(x,t)$ в виде суммы $v(x,t)$ и $W(x,t)$, причем $W(x,t)$ такая функция, что

$$W(0,t) = \mu(t),\ W(l,t) = \nu(t). \tag{5.22}$$

Тогда нетрудно видеть, что решение задачи (5.19)–(5.21) сводится к решению задачи с однородными краевыми условиями

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \widetilde{f}\,(x,t), \tag{5.23}$$

$$v(0,t) = v(l,t) = 0, \tag{5.24}$$

$$v\,(x,0) = \tilde{g}(x), \tag{5.25}$$

где

$$\tilde{f}\,(x,t) = f\,(x,t) + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial t},$$

$$\tilde{g}(x) = g(x) - W(x, 0),$$

причем

$$\tilde{g}(x) \in C^1(D), \quad \tilde{g}(0) = \tilde{g}(l) = 0.$$

Если искать функцию $W(x,t)$ в виде

$$W(x,t) = (\alpha_1 + \alpha_2 x)\,\mu(t) + (\beta_1 + \beta_2 x)\,\nu(t),$$

то нетрудно видеть, что функция

$$W(x,t) = \left[1 - \frac{x}{l}\right]\mu(t) + \frac{x}{l}\nu(t) \tag{5.26}$$

удовлетворяет условиям (5.22).

Аналогично алгоритму решения смешанной задачи для уравнения гиперболического типа функцию $v(x,t)$ будем искать в виде ряда $v(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k(x) \cdot T_k(t)$, у которого каждый член удовлетворяет уравнению теплопроводности и обращается в нуль при $x = 0$ и $x = l$. Для этого должно быть

$$X_k''(x) + \lambda X_k(x) = 0, \tag{5.27}$$

$$X_k(0) = X_k(l) = 0. \tag{5.28}$$

Из уравнения (5.27) и условий (5.28) следует, что

$$X_k(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda_k}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda_k}x, \qquad C_2 = 0,$$

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2,\ k = 1, 2,\ \ldots$$

X_k нормируем так, чтобы $\|X_k\|^2 = \dfrac{l}{2}$. В этом случае $C_1 \equiv 1$ и собственные функции принимают вид

$$X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{l}x.$$

Функцию $\tilde{f}\,(x,t)$ разложим в ряд по X_k :

$$\tilde{f}\,(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad f_k(t) = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int\limits_0^l X_k(x) \tilde{f}\,(x,t)\,dx.$$

Для функции $T_k\,(t)$ имеем уравнение

$$T_k' + \frac{\pi k}{l} T_k = f_k,$$

решая которое находим

$$T_k\,(t) = \left(\int\limits_0^t f_k\,(\tau)\, e^{\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \tau} d\tau + A_k \right) e^{-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t}.$$

Следовательно, функция

$$v\,(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi \kappa}{l} x \left(\int\limits_0^t f_k\,(\tau)\, e^{\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \tau} d\tau + A_k \right) e^{-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t} \quad (5.29)$$

является решением уравнения (5.23) и удовлетворяет краевым условиям (5.24).

Постоянные A_k определяются из начального условия

$$v\,(x,0) = \tilde{g}\,(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi k}{l} x. \quad (5.30)$$

Так как мы предположили, что $\tilde{g}\,(x)$ является непрерывно-дифференцируемой функцией и обращается в нуль при $x = 0$, $x = l$, то функция $\tilde{g}\,(x)$ может быть разложена в ряд Фурье, а коэффициенты A_k определяются по формулам Фурье:

$$A_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \tilde{g}\,(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx. \quad (5.31)$$

Итак, решение задачи (5.23)-(5.25) имеет вид

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{\pi k}{l}xe^{-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t}\times \tag{5.32}$$

$$\times\left(\frac{2}{l}\int_0^l \tilde{g}(x)\sin\frac{\pi k}{l}xdx+\int_0^t f_k(\tau)\,e^{\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2\tau}d\tau\right).$$

Решением задачи (5.19)-(5.21) является функция $u(x,t) = W(x,t) + v(x,t)$, где $W(x,t)$ определяется по формуле (5.26), а $v(x,t)$ — по формуле (5.32).

Поскольку при $t \geqslant 0$

$$0 < e^{-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t} \leqslant 1,$$

то ряд (5.32) сходится абсолютно и равномерно, поэтому функция $u(x,t)$ определяемая рядом (5.32), непрерывна в прямоугольнике $\bar{D} = \{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ и принимает заданные значения на нижнем основании и боковых его сторонах.

Остается показать, что внутри D и на его верхнем основании функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности. Для этого достаточно показать, что ряды, полученные из (5.32) почленным однократным дифференцированием по t и двукратным дифференцированием по x также абсолютно и равномерно сходятся. А это утверждение следует из того, что при всяком положительном t

$$\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t} < 1,$$

если k достаточно велико.

Совершенно также можно показать существование у функции $u(x,t)$ внутри D и на его верхнем основании непрерывных производных всех порядков по x и t.

5.3. Решение краевых задач для уравнений эллиптического типа методом разделения переменных

5.3.1. Построение решений краевых задач в прямоугольных областях

В прямоугольной области $D = \{0 < x < p, 0 < y < s\}$ для уравнения Лапласа рассмотрим следующую задачу

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{5.33}$$

$$u(0, y) = u(p, y) = 0, \tag{5.34}$$

$$u(x, 0) = f(x), u(x, s) = g(x). \tag{5.35}$$

Будем искать её решение в виде

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y). \tag{5.36}$$

Подставляя (5.36) в уравнение (5.33), после разделения переменных получаем

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

В силу условия (5.34) для функции X имеем задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(p) = 0, \end{cases} \tag{5.37}$$

а функция Y является решением уравнения

$$Y'' - \lambda Y = 0. \tag{5.38}$$

Решением задачи (5.37) является функция

$$X_k(x) = \sin\sqrt{\lambda_k}x,\ \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{p}\right)^2,\ \|X_k\|^2 = \frac{p}{2},\ k = 1, 2, \ldots$$

Из уравнения (5.38) находим

$$Y(y) = A_k e^{\sqrt{\lambda_k}y} + B_k e^{-\sqrt{\lambda_k}y}$$

Поскольку $u\left(x,y\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}X_kY_k$, то

$$u\left(x,y\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin\sqrt{\lambda_k}x\left[\mathrm{A}_ke^{\sqrt{\lambda_k}y}+\mathrm{B}_ke^{-\sqrt{\lambda_k}y}\right]. \tag{5.39}$$

Удовлетворяем (5.39) условиям (5.35), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin\sqrt{\lambda_k}x\left[\mathrm{A}_k+\mathrm{B}_k\right]=f\left(x\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin\sqrt{\lambda_k}x\left[\mathrm{A}_ke^{\sqrt{\lambda_k}s}+\mathrm{B}_ke^{-\sqrt{\lambda_k}s}\right]=g\left(x\right).$$

Разлагая функции $f(x)$, $g(x)$ в ряд Фурье по X_k, $k=1,2,\ldots$ имеем

$$f\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}f_kX_k,\quad g\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}g_kX_k,$$

где f_k,g_k — коэффициенты Фурье. В силу независимости собственных функций X_k для определения A_k, B_k получаем систему алгебраических уравнений

$$A_k+B_k=\frac{1}{\left\|X_k\right\|^2}\int\limits_0^p f\left(x\right)\mathrm{X}_k\left(x\right)dx=f_k,$$

$$A_ke^{\sqrt{\lambda_k}s}+B_ke^{-\sqrt{\lambda_k}s}=\frac{1}{\left\|X_k\right\|^2}\int\limits_0^p g\left(x\right)\mathrm{X}_k\left(x\right)dx=g_k,$$

решая которую находим

$$A_k=\frac{f_ke^{-\sqrt{\lambda_k}s}-g_k}{e^{-\sqrt{\lambda_k}s}-e^{\sqrt{\lambda_k}s}}, \tag{5.40}$$

$$B_k=\frac{g_k-f_ke^{\sqrt{\lambda_k}s}}{e^{-\sqrt{\lambda_k}s}-e^{\sqrt{\lambda_k}s}}. \tag{5.41}$$

Решение задачи (5.33)–(5.35) дается формулой (5.39), где A_k, B_k вычисляются по формулам (5.40), (5.41).

Рассмотрим теперь в прямоугольной области $D = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$ задачу:

$$u_{xx} + u_{yy} = w\left(x, y\right), \tag{5.42}$$

$$u\left(0, y\right) = \mu\left(y\right),\ u\left(a, y\right) = \nu\left(y\right), \tag{5.43}$$

$$u\left(x, 0\right) = f\left(x\right),\ u\left(x, b\right) = g\left(x\right). \tag{5.44}$$

Функции μ, ν, f, g удовлетворяют условиям $\mu\left(0\right) = f\left(0\right),\ \nu(0) = g(0)$.

Метод разделения переменных эффективен, когда на всей границе или части её краевые условия нулевые. Преобразуем искомую функцию так, чтобы для новой неизвестной функции при $x = 0$, $x = a$ краевые условия были бы нулевыми:

$$u\left(x, y\right) = v\left(x, y\right) + W\left(x, y\right).$$

Функцию $W\left(x, y\right)$ нужно выбрать такой, чтобы

$$W\left(0, y\right) = \mu\left(y\right),\ W\left(a, y\right) = \nu\left(y\right).$$

В частности, $W\left(x, y\right)$ можно взять в виде

$$W\left(x, y\right) = \frac{x}{a}\Big[\nu\left(y\right) - \mu\left(y\right)\Big] + \mu\left(y\right).$$

Новой неизвестной функцией будем считать $v\left(x, y\right)$, для которой получаем следующую задачу Дирихле:

$$v_{xx} + v_{yy} = \tilde{w}\left(x, y\right), \tag{5.45}$$

$$v\left(0, y\right) = 0,\ v\left(a, y\right) = 0, \tag{5.46}$$

$$v\left(x, 0\right) = \tilde{f}\left(x\right),\ v\left(x, b\right) = \tilde{g}\left(x\right), \tag{5.47}$$

где

$$\tilde{w}\left(x, y\right) = w\left(x, y\right) - W_{xx}\left(x, y\right) - W_{yy}\left(x, y\right),$$

$$\tilde{f}(x) = f(x) - W(x,0),$$
$$\tilde{g}(x) = g(x) - W(x,b).$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Решение этого уравнения представим в виде произведения:

$$v(x,y) = X(x)\,Y(y).$$

После подстановки в уравнение и деления обеих частей на $X(x)\,Y(y)$, получим

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda.$$

Для определения функции $X(x)$ получаем спектральную задачу

$$X'' + \lambda X = 0,\ X(0) = 0,\ X(a) = 0. \tag{5.48}$$

При

$$\lambda = \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{a}\right)^2,\ k = 1, 2, \ldots$$

имеем нетривиальные решения

$$X_k(x) = \sin\sqrt{\lambda_k}x,\ \|X_k\|^2 = \int\limits_0^a \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\,dx = \frac{a}{2}.$$

Система функций $X_k(x)$ полна и ортогональна в пространстве функций $L_2(0,a)$.

Пусть решение задачи (5.45)–(5.47) представимо в виде

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\sqrt{\lambda}_k x\,Y_k(y). \tag{5.49}$$

Разложим функции $\tilde{f}\,(x)\,,\tilde{g}\,(x)\,,\tilde{w}\,(x,y)$ в ряды Фурье по $X_k\,(x)\,,\quad k=1,2,\ldots$

$$\tilde{f}\,(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_kX_k,\ \ \tilde{g}\,(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_kX_k, \tag{5.50}$$

$$\tilde{w}\,(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}w_k(y)X_k, \tag{5.51}$$

где

$$f_k=\frac{1}{\|X_k\|^2}\int_0^p f\,(x)X_k\,(x)\,dx,$$

$$g_k=\frac{1}{\|X_k\|^2}\int_0^p g\,(x)X_k\,(x)\,dx,$$

$$w_k(y)=\frac{1}{\|X_k\|^2}\int_0^p \tilde{w}\,(x,y)X_k\,(x)\,dx.$$

Подставляем (5.49), (5.51) в неоднородное уравнение (5.45) с учетом равенства $X_k''\,(x)=-\lambda_kX_k\,(x)$ приравнивая коэффициенты разложений в ряд Фурье, получаем бесконечное число дифференциальных уравнений второго порядка

$$Y_k''-\lambda_kY_k=w_k\,(y)\,,$$

совокупность решений которых описывается формулой

$$Y_k\,(y)=A_ke^{\sqrt{\lambda_k}y}+B_ke^{-\sqrt{\lambda_k}y}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^y w_k\,(s)sh\sqrt{\lambda_k}\,(y-s)\,ds,$$

в которой первые два слагаемые — это общее решение однородного уравнения, последнее — частное решение неоднородного уравнения. Тогда

$$v\left(x,y\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin\sqrt{\lambda_k}x\Big[\mathrm{A}_k e^{\sqrt{\lambda_k}y}+\mathrm{B}_k e^{-\sqrt{\lambda_k}y}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^y w_k\left(s\right)sh\sqrt{\lambda_k}\left(y-s\right)ds\Big]. \qquad (5.52)$$

Чтобы определить коэффициенты A_k, B_k, необходимо удовлетворить это решение условиям (5.47). С учетом (5.50), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin\sqrt{\lambda_k}x\ \left[A_k+B_k\right]=\tilde{f}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_kX_k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin\sqrt{\lambda_k}x\ \Big[A_k e^{\sqrt{\lambda_k}b}+B_k e^{-\sqrt{\lambda_k}b}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^b w_k(s)sh\sqrt{\lambda_k}(b-s)ds\Big]=\tilde{g}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_kX_k.$$

Приравнивая коэффициенты разложений в ряд Фурье, получаем систему алгебраических уравнений для определения постоянных A_k, B_k

$$A_k+B_k=f_k,$$

$$A_k e^{\sqrt{\lambda_k}b}+B_k e^{-\sqrt{\lambda_k}b}=g_k-\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^b w_k(s)sh\sqrt{\lambda_k}(b-s)ds.$$

Подставляя найденные значения A_k, B_k в (5.52), получаем решение задачи (5.45)–(5.47). Затем, суммируя с $W(x,y)$ получаем решение задачи (5.42)–(5.44).

5.3.2. Построение решений краевых задач в круговых областях

Двумерное уравнение Лапласа в полярных координатах

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi$$

имеет вид

$$u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}u_r = 0. \tag{5.53}$$

Найдем общее решение этого уравнения при условии, что оно является периодическим, с периодом равным 2π по переменной φ.

Ищем решение в виде произведения двух функций

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi).$$

Подставляем u в уравнение (5.53), получаем

$$R''\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' + \frac{1}{r}R'\Phi = 0.$$

Умножая это уравнение на $\dfrac{1}{\Phi R}$, после разделения переменных имеем два уравнения

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \tag{5.54}$$

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0. \tag{5.55}$$

Заметим, что при $\lambda < 0$ функция $\Phi(\varphi)$ не является периодической, при $\lambda > 0$ решением уравнения (5.54) является функция

$$\Phi_k = A_k\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B_k\sin\sqrt{\lambda}\varphi,$$

которая является периодической при $\lambda = k^2$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$\Phi_k = A_k\cos k\varphi + B_k\sin k\varphi.$$

При $\lambda = 0$ уравнение (5.54) имеет вид $\Phi'' = 0$. Его решением является многочлен первой степени. Поскольку константа является периодической функцией, то собственному значению $\lambda = 0$ соответствует собственная функция $\Phi_0 = const$. Возьмём эту константу равной единице, тогда

$$||\Phi_0||^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Уравнение (5.55) является уравнением Эйлера. Произведём замену переменных $r = e^t$, $t = \ln r$. В результате получим уравнение

$$R_{tt} - k^2 R = 0.$$

Нетрудно увидеть, что функции

$$R_k(t) = \alpha_k e^{kt} + \beta_k e^{-kt}$$

являются его решением. После обратной замены, находим

$$R_k(r) = \alpha_k r^k + \beta_k r^{-k}.$$

При $\lambda = 0$ имеем уравнение $R_{tt} = 0$. Его решением является многочлен $a_0 + b_0 t$. После обратной замены $t = \ln r$, находим

$$R_0(r) = a_0 + b_0 \ln r.$$

Итак, общее решение уравнения Лапласа (5.53) представляется в виде ряда

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(\varphi) R_k(r) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\varphi (A_k r^k + B_k r^{-k}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\varphi (C_k r^k + D_k r^{-k}), \qquad (5.56)$$

где a_0, b_0, A_k, B_k, C_k, D_k — неизвестные постоянные.

В кольце $D = \{(r, \varphi) : \alpha < r < \beta, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$ рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + \dfrac{1}{r} u_r = 0, \\ u(\alpha, \varphi) = f(\varphi), \\ u(\beta, \varphi) = g(\varphi). \end{cases} \tag{5.57}$$

Удовлетворяем решение (5.56) краевым условиям (5.57), получаем

$$u(\alpha, \varphi) = a_0 + b_0 \ln \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\varphi (A_k \alpha^k + B_k \alpha^{-k}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\varphi (C_k \alpha^k + D_k \alpha^{-k}) = f(\varphi),$$

$$u(\beta, \varphi) = a_0 + b_0 \ln \beta + \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\varphi (A_k \beta^k + B_k \beta^{-k}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\varphi (C_k \beta^k + D_k \beta^{-k}) = g(\varphi)$$

Функции $f(\varphi)$, $g(\varphi)$ разлагаем в ряд Фурье по тригонометрической системе $\{1, \sin k\varphi, \cos k\varphi\}$

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^1 \sin k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \cos k\varphi, \\ g(\varphi) &= g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k^1 \sin k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} g_k^2 \cos k\varphi, \end{aligned} \tag{5.58}$$

где

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi,$$

$$f_k^1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\sin k\varphi d\varphi, \tag{5.59}$$

$$f_k^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\cos k\varphi d\varphi,$$

$$g_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi}^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi,$$

$$g_k^1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\varphi)\sin k\varphi d\varphi, \tag{5.60}$$

$$g_k^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\varphi)\cos k\varphi d\varphi.$$

Тогда для определения неизвестных коэффициентов a_0, b_0, A_k, B_k, C_k, D_k получаем системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln\alpha = f_0, \\ a_0 + b_0 \ln\beta = g_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_k\alpha^k + B_k\alpha^{-k} = f_k^1, \\ A_k\beta^k + B_k\beta^{-k} = g_k^1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_k\alpha^k + D_k\alpha^{-k} = f_k^2, \\ C_k\beta^k + D_k\beta^{-k} = g_k^2, \end{cases}$$

разрешая которые находим a_0, b_0, A_k, B_k, C_k, D_k. Далее, подставляем эти коэффициенты в (5.56), получаем гармоническую функцию, удовлетворяющую краевым условиям (5.57).

Решение краевых задач для уравнения Лапласа в круге

Нужно найти внутри круга радиуса R гармоническую функцию, удовлетворяющую краевому условию

$$u(R,\varphi) = f(\varphi). \tag{5.61}$$

Заметим, поскольку решение данной задачи должно быть ограниченным, то в формуле (5.56) константы b_0, B_k, D_k нужно взять равными нулю. Тогда общее решение уравнения Лапласа внутри круга имеет вид

$$u(r,\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\varphi A_k r^k + \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\varphi C_k r^k. \tag{5.62}$$

Удовлетворяем его краевому условию при $r = R$, получаем

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\varphi A_k R^k + \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\varphi C_k R^k = f(\varphi).$$

Разлагаем функцию $f(\varphi)$ в ряд Фурье, по системе $\{1, \sin k\varphi, \cos k\varphi\}$, получаем ряд

$$f(\varphi) = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^1 \sin k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \cos k\varphi,$$

где коэффициенты $f_{0,}$ f_k^1, f_k^2 определяются по формулам (5.59). Тогда

$$a_0 = f_0,\ A_k R^k = f_k^1,\ C_k R^k = f_k^2.$$

Находим a_0, A_k, C_k, подставляем (5.62) и получаем решение уравнение Лапласа внутри круга

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sin k\varphi\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi)\sin k\varphi d\varphi\left(\frac{r}{R}\right)^k+$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\varphi\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi)\cos k\varphi d\varphi\left(\frac{r}{R}\right)^k, \tag{5.63}$$

удовлетворяющее на границе $r=R$ краевому условию (5.61).

Решение краевых задач для уравнения Лапласа вне круга

Нужно найти вне круга радиуса R гармоническую функцию, удовлетворяющую краевому условию

$$u(R,\varphi)=f(\varphi). \tag{5.64}$$

Поскольку решение данной задачи должно быть ограниченным на бесконечности, то в формуле (5.56) константы b_0, A_k, C_k нужно взять равными нулю. Тогда общее решение уравнение Лапласса вне круга имеет вид

$$u(r,\varphi)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\sin k\varphi B_k r^{-k}+\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\varphi D_k r^{-k}. \tag{5.65}$$

Удовлетворяем его краевому условию при $r=R$, получаем

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\sin k\varphi B_k R^{-k}+\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\varphi D_k R^{-k}=f(\varphi).$$

Разлагаем функцию $f(\varphi)$ в ряд Фурье по системе $\{1, \sin k\varphi, \cos k\varphi\}$, приравниваем коэффициенты разложений, имеем

$$a_0=f_0,\ B_k R^{-k}=f_k^1,\ D_k R^{-k}=f_k^2.$$

$f_0,\ f_k^1,\ f_k^2$ определяются по формулам (5.59). Найдя a_0, B_k, D_k, подставим в (5.65) и получим решение уравнения Лапласа вне круга

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sin k\varphi\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\sin k\varphi d\varphi\left(\frac{R}{r}\right)^k +$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\varphi\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\cos k\varphi d\varphi\left(\frac{R}{r}\right)^k, \tag{5.66}$$

удовлетворяющее на границе $r = R$ краевому условию (5.64).

5.4. Вопросы и задачи

1. Покажите, что функция вида

$$u(x,t) = \cos(a\lambda t)(A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)),$$

удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$ при произвольных значениях действительных постоянных A, B и λ.

2. Покажите, что при любых натуральных n и m

$$\int\limits_0^1 \sin(\pi n x)\sin(\pi m x)dx = \begin{cases} 0,\ m \neq n, \\ \dfrac{1}{2},\ m = n, \end{cases}$$

$$\int\limits_0^1 \cos(\pi n x)\cos(\pi m x)dx = \begin{cases} 0,\ m \neq n, \\ \dfrac{1}{2},\ m = n. \end{cases}$$

3. Найдите решение смешанной задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + x, \ \ 0 < x < 1,\, 0 < t < \infty, \\ u(0,t) = 0, \ \ 0 < t < \infty, \\ u(1,t) = 0, \ \ 0 < t < \infty, \\ u(x,0) = \sin(\pi x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u_t(x,0) = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

4. Найдите решение смешанной задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + u, \ 0 < x < 1, \ 0 < t < \infty, \\ \\ u\,\big|_{x=0} = 0, \ u\,\big|_{x=1} = 0, \ , \ 0 < t < \infty, \\ \\ u\,\big|_{t=0} = 0, \ u_t\,\big|_{t=0} = 1. \ , \ 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

5. Найдите разложение в ряд Фурье функции $\varphi(x) = x$ по тригонометрической системе $\{\sin(\pi n x)\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке $[0,1]$.

6. Используя результаты задачи 5, найдите решение смешанной задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ \ 0 < x < 1,\, 0 < t < \infty, \\ u(0,t) = 0, \ \ 0 < t < \infty, \\ u(1,t) = 1, \ \ 0 < t < \infty, \\ u(x,0) = x, \ 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

7. Найдите решение смешанной задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ \ 0 < x < 1,\, 0 < t < \infty, \\ u(0,t) = 0, \ \ 0 < t < \infty, \\ u(1,t) = 0, \ \ 0 < t < \infty, \\ u(x,0) = \sin(2\pi x) + \dfrac{1}{3}\sin(4\pi x) + \dfrac{1}{5}\sin(6\pi x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

8. Найдите решение смешанной задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + x\cos t, \;\; 0 < x < 1, \, 0 < t < \infty, \\ u(0,t) = 1, \;\; 0 < t < \infty, \\ u(1,t) = 1, \;\; 0 < t < \infty, \\ u(x,0) = \sin(\pi x) + 1, \; 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

9. В круге $0 \leqslant r < 1$ найдите гармонические функции, удовлетворяющие соответственно значениям:

а) $u(1,\varphi) = 1 + \sin\varphi + \dfrac{1}{2}\cos\varphi, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$;

б) $u(1,\varphi) = 5, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$;

в) $u(1,\varphi) = \sin\varphi, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$;

г) $u(1,\varphi) = \sin 3\varphi, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

10. Вне круга $0 \leqslant r \leqslant R$ найдите гармоническую функцию, удовлетворяющую граничному значению

$$u(R,\varphi) = \varphi\sin\varphi, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Список литературы

1. Бицадзе, А. В. Сборник задач по уравнениям математической физики / А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко. — М.: Наука, 1985.

2. Бицадзе, А. В. Уравнения математической физики / А. В. Бицадзе. — М.: Наука; ФИЗМАТЛИТ, 1982.

3. Васильева, А. Б. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А. Б. Васильева, Г. Н. Медведев, Н. А. Тихонов, Т. А. Уразгильдина. — СПб.: Лань, 2010.

4. Владимиров, В. С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В. С. Владимиров. — М.: Наука; ФИЗМАТЛИТ, 2001.

5. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

6. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. — М.: Высшая школа, 1970.

7. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. — М.: Наука, 1983.

8. Могилевский, И. Ш. Сборник задач по уравнениям с частными производными / И. Ш. Могилевский, Г. С. Шаров. — Тверской гос. ун-т. — Тверь: Изд-во ТверГУ, 2004.

9. Петровский, И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

10. Романко, В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления / В.К. Романко. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.

11. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1999.

Учебное издание

**Прокудин Дмитрий Алексеевич,
Глухарева Татьяна Владимировна,
Казаченко Ирина Валерьевна**

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Редактор Л. Г. Барашкова
Технический редактор В. П. Долгих
Подписано в печать 03.06.2014 г. Формат $60\times84\,{}^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Бумага офсетная №1. Печ. л. 10.
Тираж 100 экз. Заказ № 59.

Кемеровский государственный университет
650043, г. Кемерово, ул. Красная, 6

Отпечатано в типографии "Печатный двор Кузбасса" , 650000, г. Кемерово, ул. Мичурина, 56, тел. 8(384-2) 76-58-88.